ABITURPRÜFUNG 2008 AN BERUFSOBERSCHULEN

UND IM SCHULVERSUCH FOS 13

ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Donnerstag, den 5. Juni 2008, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten; die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A
A I

1 Gegeben ist die reelle Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ durch

$$f: x \mapsto \begin{cases} -2 \cdot \arcsin(e^{-x} - 1) \text{ für } x \geq 0 \\ 2 \cdot \arcsin(e^{x} - 1) \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

1.1 Bestimmen Sie die Nullstelle von f. Ermitteln Sie rechnerisch das Symmetrieverhalten des Graphen von f. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an. (7 BE)

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f und begründen Sie, dass die Funktion f an der Stelle x=0 differenzierbar ist. (8 BE)
(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2e^x - 1}}$ für x>0)

1.3 Bestimmen Sie nun das Monotonieverhalten des Graphen von f' und geben Sie Art und Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von f' an. (6 BE)

1.4 Prüfen Sie, ob $f''(0)$ existiert, und zeigen Sie, dass der Ursprung des Koordinatensystems Wendepunkt des Graphen von f ist. (Teilergebnis: $f''(x) = -2e^x \cdot (2e^x - 1)^{-1,5}$ für x>0) (4 BE)

1.5 Zeichnen Sie für $-6 \leq x \leq 6$ die Graphen der Funktionen f und f' in ein kartesisches Koordinatensystem (Längeneinheit 1cm). (6 BE)

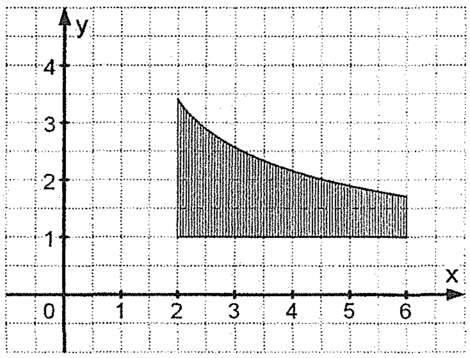
1.6 Gegeben ist die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)dt$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Begründen Sie, dass die Funktion F genau zwei Nullstellen besitzt, und geben Sie diese an. (6 BE)

2 Gegeben sind die reellen Funktionen $g: x \mapsto 1$, $x \in \mathbb{R}$ und $h: x \mapsto \frac{4}{\sqrt{x(x-1) \cdot \ln(\frac{x}{x-1})}}$ mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_h.

2.1 Zeigen Sie, dass gilt: $D_h =]\,1\,;+\infty\,[$. (5 BE)

2.2 Nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen g und h für $2 \leq x \leq 6$. Rotiert die schraffierte Fläche um die x-Achse, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper.
Berechnen Sie die Maßzahl V des Volumeninhalts dieses Körpers auf zwei Nachkommastellen genau.

(Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t = \ln(\frac{x}{x-1})$)



(8 BE)

3 Werden ein Kondensator der Kapazität C und ein ohmscher Widerstand R in Reihenschaltung an eine Gleichspannungsquelle der Spannung U angeschlossen, ergibt sich die Differenzialgleichung

$RC \cdot \dot{Q}(t) + Q(t) = \frac{CU}{T} \cdot t$ mit den physikalischen Konstanten C, R, T, U für die Ladung Q(t) auf dem Kondensator.

Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Variation der Konstanten für Q(0)=0. (10 BE)

A II

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \frac{(1+ax)\cdot e^{ax}}{1+x^2\cdot e^{2ax}}$ und die Integralfunktion $F_a: x \mapsto \int_0^x f_a(t)\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstelle von f_a und durch eine geeignete Rechnung das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge in Abhängigkeit von a. (9 BE)

1.2 Ermitteln Sie die x-Werte, für die der Graph von f_a oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verläuft.(4 BE)

1.3 Bestimmen Sie, ohne die Integration durchzuführen, das Monotonieverhalten und eventuelle Extremstellen des Graphen von F_a und deren Art. (5 BE)

1.4 Zeigen Sie, dass die Funktion $h_a: x \mapsto \arctan(x\cdot e^{ax})$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ eine Stammfunktion der Funktion f_a ist, und begründen Sie, dass gilt: $F_a = h_a$. (5 BE)

1.5 Geben Sie für $F_1 = h_1$ die Nullstelle und für den Graphen von F_1 die Koordinaten und Art des Extrempunkts an. Zeichnen Sie den Graphen von F_1 im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2cm). (7 BE)

1.6 Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} F_1(x)$. Welcher Flächeninhalt lässt sich mithilfe dieses Grenzwertes angeben? (3 BE)

2 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto x\sqrt{e^{2}-e^{x}}$ mit $x \in [0\,;2]$.
Aus einem hinreichend dicken Holzstück wird ein Körper gedrechselt, dessen Längsschnitt von dem Graphen von g und dessen Spiegelbild bezüglich der x-Achse begrenzt wird. Berechnen Sie die Maßzahl V des Volumeninhalts. (6 BE)

3 In der folgenden Aufgabe soll die Differenzialgleichung für die Teilchenzahl n(t) der Tochtersubstanz eines radioaktiven Mutter - Tochter - Zerfalls untersucht werden. Von der radioaktiven Muttersubstanz mit der Zerfallskonstanten $\lambda_M > 0$ liegen zu der Zeit $t = 0$ N_0 Atome vor. Die ebenfalls radioaktive Tochtersubstanz zerfällt mit der Zerfallskonstanten $\lambda_T > 0$.
Für die Teilchenzahl n(t) der Tochtersubstanz gilt für $t \geq 0$ folgende Differenzialgleichung:

$$\dot{n}(t) = \lambda_M \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} - \lambda_T \cdot n(t)\ .$$

3.1 Bestimmen Sie die Lösung n(t) für $\lambda_M = \lambda_T = \lambda$ mithilfe der Variation der Konstanten, wenn gilt: $n(0) = 0$. (6 BE)

3.2 Lösen Sie nun obige Differenzialgleichung für n(t) für $\lambda_M \neq \lambda_T$, wenn ebenfalls gilt: $n(0) = 0$. (8 BE)
(Ergebnis: $n(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(e^{-\lambda_M \cdot t} - e^{-\lambda_T \cdot t}\right)$)

3.3 Begründen Sie für den Fall $\lambda_M \neq \lambda_T$ in Abhängigkeit von λ_M und λ_T ohne Verwendung von $\dot{n}(t)$, dass n(t) ein absolutes Maximum besitzt. Berechnen Sie nun diesen Zeitpunkt t_{max} mit Hilfe von $\dot{n}(t)$. (7 BE)

Aufgabengruppe B

B I

Ein Autoteilezulieferer stellt für eine Autofirma ein aufwändiges elektronisches Bauteil her. Langfristig stellt man fest, dass 8% der Bauteile fehlerhaft sind. Interpretieren Sie diese relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil fehlerhaft ist.

1 In einem Karton befinden sich 50 Bauteile, von denen genau vier fehlerhaft sind.

1.1 Jemand nimmt aus dem Karton zufällig fünf Bauteile. Berechnen Sie, mit welchen Wahrscheinlichkeiten folgende Ereignisse eintreten.
A: „Unter den herausgenommenen Bauteilen befinden sich genau zwei fehlerhafte."
B: "Unter den herausgenommenen Bauteilen befindet sich mindestens ein fehlerhaftes." (5 BE)

1.2 Die 50 Bauteile werden aus dem Karton genommen und nebeneinander gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die vier fehlerhaften Bauteile genau nebeneinander? (2 BE)

2 Zur Auslieferung der Bauteile an die Autofirma werden jeweils 8 Kartons mit 50 Bauteilen auf eine Palette gepackt.

2.1 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich auf einer Palette mindestens 30 fehlerhafte Bauteile befinden. (5 BE)

2.2 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einem Karton mindestens drei fehlerhafte Bauteile sind, sowie die Wahrscheinlichkeit, dass auf einer Palette in mindestens einem Karton wenigstens drei fehlerhafte Bauteile sind. (6 BE)

3 Berechnen Sie, wie viele Bauteile aus der laufenden Produktion man mindestens überprüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mehr als fünf fehlerhafte Bauteile zu finden. (8 BE)

4 Die Autofirma behauptet, dass die Fehlerquote bei den Bauteilen 8% überschritten hat (Gegenhypothese). Um dies in einem Signifikanztest zu überprüfen, werden der Produktion 200 Bauteile entnommen und untersucht. Es wird ein Signifikanzniveau von 10% vereinbart.

4.1 Ermitteln Sie, für welche Anzahlen von fehlerhaften Teilen man sich nicht für die gestiegene Fehlerquote entsprechend der Behauptung der Autofirma entscheidet. (Ergebnis: $A = \{0,...,21\}$) (6 BE)

4.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Annahmebereich aus 4.1 nicht bemerkt wird, wenn die Fehlerquote bei der Produktion auf 15% ansteigt. (2 BE)

5 Um die Fehlerquote zu senken, soll die Produktion der Bauteile zukünftig mit einer neuen Fertigungsstraße erfolgen. Die neue Fertigungsstraße kann 70% der Produktion übernehmen, die Fehlerquote beträgt zwei Prozent. Die verbleibenden 30% werden nach wie vor mit der alten Fertigungsstraße mit der Fehlerquote von 8% hergestellt.

5.1 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Bauteil der Gesamtproduktion fehlerhaft ist. (4 BE)

5.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fehlerhaftes Teil von der neuen Fertigungsstraße stammt. (2 BE)

B II

Der Support für ein älteres Betriebssystem eines Softwareentwicklers läuft in Kürze aus. Deshalb wird es in einem Fachgeschäft als Sonderangebot verkauft.

1 60% der Kunden, die das Fachgeschäft besuchen, kaufen das Betriebssystem, 10% dieser Kunden erwerben auch noch das zugehörige Officepaket. 8% aller Kunden kaufen nur das Officepaket. Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit,
a) dass ein zufällig ausgewählter Kunde ein Officepaket erwirbt,
b) dass ein Kunde, der kein Betriebssystem kauft, ein Officepaket erwirbt.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A:„Ein Kunde kauft ein Betriebssystem" und B:„Ein Kunde kauft ein Officepaket" stochastisch unabhängig sind. (6 BE)

2 Ein Großhändler kauft in sehr großen Mengen Datenträger ein, weil er Käufern des Betriebssystems ein Paket von Datenträgern kostenlos dazugeben will. Er weiß, dass auf Grund schlechter Qualität des Trägermaterials 5% der Datenträger unbrauchbar sind.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
F: „Erst der fünfte entnommene Datenträger ist unbrauchbar."
D: „Frühestens der dritte entnommene Datenträger ist unbrauchbar."
S: „Spätestens der fünfte entnommene Datenträger ist unbrauchbar." (4 BE)

2.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zehnte entnommene Datenträger der dritte unbrauchbare ist. (2 BE)

2.3 Berechnen Sie die Anzahl der Datenträger, die ein Kunde mindestens erhalten muss, um mit mehr als 99% Wahrscheinlichkeit mindestens einen unbrauchbaren Datenträger zu bekommen. (4 BE)

2.4 Ein guter Kunde erhält 200 Datenträger. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon 12 oder mehr Datenträger unbrauchbar sind. (3 BE)

3 Das Betriebssystem gilt als sehr zuverlässig. Diese Behauptung soll durch eine Umfrage in einem Forum im Internet überprüft werden, an der 2000 Mitglieder des Forums, die das Betriebssystem installiert haben, teilnehmen.

3.1 Nach Aussage des Softwareentwicklers läuft höchstens 1% aller installierten Betriebssysteme instabil (Nullhypothese). Die Nullhypothese soll beibehalten werden, wenn höchstens 27 der Mitglieder des Forums über ein instabiles System klagen. Berechnen Sie das Risiko, mit dieser Entscheidungsregel die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, sowie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn 2% der installierten Betriebssysteme instabil sind. (8 BE)

3.2 Kurz nach dem Ende des Supports für das Betriebssystem häufen sich im Internet die Beschwerden. Auf Nachfrage gibt der Softwareentwickler die Verschlechterung zu, behauptet aber, dass höchstens 4% aller installierten Systeme instabil laufen (Nullhypothese).
Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für 2000 Befragte so, dass das Risiko, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen, höchstens 5% beträgt. (7 BE)

4 Die Wahrscheinlichkeit für ein instabiles Betriebssystem beträgt 4%. Es werden 2000 Forumsmitglieder bezüglich der Instabilität befragt. Berechnen Sie ein zum Erwartungswert symmetrisches, möglichst kleines Intervall, in dem mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% die Anzahl der instabilen Betriebssysteme liegt. Verwenden Sie dabei die Normalverteilung als Näherung. (6 BE)