ABITURPRÜFUNG 2009 AN BERUFSOBERSCHULEN

UND FACHOBERSCHULEN

ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Freitag, den 29. Mai 2009, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten; die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A
A I

1 Gegeben ist die reelle Funktion f in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$f: x \mapsto \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-2x+2}} \quad .$$

1.1 Bestimmen Sie D_f und die Koordinaten der gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. (4 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung x = 1 ist, und bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to \pm\infty$ und die Gleichung der Asymptote. (5 BE)

1.3 Bestimmen Sie $f'(x)$, das Monotonieverhalten des Graphen von f und das Verhalten von $f'(x)$ für $x \to 1$ sowie die Art und Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von f. (8 BE)
(Teilergebnis: $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)^{-1{,}5}$ für $x>1$)

1.4 Zeichnen Sie für $-2 \leq x \leq 4$ den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 2 cm). (4 BE)

1.5 Die Gerade mit der Gleichung y = 1 und der Graph von f schließen eine Fläche ein. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper. Berechnen Sie die Maßzahl V seines Volumeninhalts. (7 BE)

1.6 Gegeben sind nun die reellen Funktionen g und h mit $D_g = D_h = \mathbb{R}$ durch $g: x \mapsto \arccos(f(x))$ und

$$h: x \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{|x-1|}\right) & \text{für } x \neq 1 \\ 0{,}5\pi & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad .$$

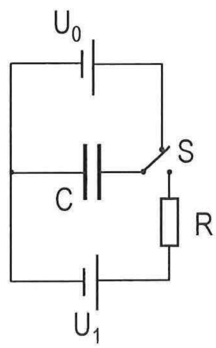
1.6.1 Zeigen Sie, dass g keine Nullstellen besitzt. Ermitteln Sie $g'(x)$ und zeigen Sie, dass gilt: g = h.
(Teilergebnis: $g'(x) = \frac{-1}{x^2-2x+2}$ für $x>1$) (14 BE)

1.6.2 Bestimmen Sie für die Funktion H mit $H(x) = \int_1^x h(t)dt$, $x>1$ eine integralfreie Darstellung. (10 BE)
(Hinweis: Beginnen Sie mit der Substitution $z = t - 1$ bzw. $z = x - 1$.)

2 Ein Kondensator der Kapazität C wird an der Gleichspannungsquelle der Spannung U_0 aufgeladen. Für die Beträge der Spannungen U_0 und U_1 gilt: $U_1 < U_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S umgelegt, so dass sich der Kondensator der Kapazität C über den ohmschen Widerstand R entladen kann. Während des Entladevorgangs gilt für den Betrag der Spannung $U = U(t)$ am Kondensator die Differenzialgleichung

$$\dot{U}(t) = a \cdot (U_1 - U(t)) \text{ mit } \dot{U}(t) = \frac{dU(t)}{dt} \text{ und } a = \frac{1}{RC} \; .$$

Berechnen Sie die spezielle Lösung U(t) der obigen Differenzialgleichung, falls zum Zeitpunkt t = 0 für die Spannung am Kondensator gilt: $U(0) = 3 \cdot U_1$.



(8 BE)

A II

1 Gegeben ist die Funktion $f_a\colon x \mapsto 2e^{-x}\cdot\sqrt{e^x - a}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ in der von a abhängigen maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie D_{f_a} und eventuelle Nullstellen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a. (3 BE)
(Teilergebnis: $D_{f_a} = [\,\ln(a)\,;\,+\infty\,[$)

1.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a in Abhängigkeit von a und ermitteln Sie Art und Koordinaten eventuell vorhandener Extremalpunkte des Graphen von f_a.
(mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = \dfrac{2a-e^x}{e^x\cdot\sqrt{e^x-a}}$) (10 BE)

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \to \infty$ sowie das Verhalten von $f_a'(x)$ für $x \to \ln(a)$. (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse und weiterer Funktionswerte den Graphen der Funktion f_1 ($a = 1$) für $0 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 2 cm). (4 BE)

1.5 Die Integralfunktion F von f_1 ist gegeben durch $F(x) = \int\limits_0^x f_1(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}_0^+$.

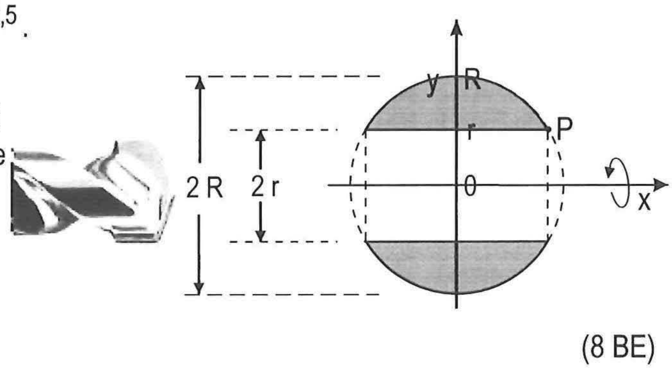
1.5.1 Berechnen Sie eine integralfreie Darstellung des Funktionsterms F(x) und untersuchen Sie die Funktion F auf Nullstellen.
Hinweis: Beginnen Sie mit einer partiellen Integration und führen Sie dann eine geeignete Substitution durch. (Teilergebnis: $\int f_1(x)\,dx = -f_1(x) + 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C,\ C \in \mathbb{R}$) (10 BE)

1.5.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von F. (4 BE)

1.5.3 Der Graph von f_1 und die x-Achse begrenzen eine Fläche, die sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (5 BE)

2 Eine Kugel mit dem Radius R wird mit einem zylindrischen Bohrer mit dem Radius r zentral durchbohrt. Zeigen Sie mithilfe der Integralrechnung, dass für die Maßzahl V des Volumeninhalts der durchbohrten Kugel gilt: $V = \frac{4}{3}\pi\cdot(R^2 - r^2)^{1{,}5}$.

Hinweis:
In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Koordinaten der Punkte einer Kreislinie mit dem Radius R und mit dem Ursprung als Mittelpunkt die Gleichung: $x^2 + y^2 = R^2$.
Berechnen Sie damit zuerst die Koordinaten des Punktes P (siehe Skizze).



(8 BE)

3 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten

$$x\cdot y' - 3y' + y = \frac{x-3}{x^2+1} \quad \text{für } x > 3.$$ (10 BE)

Aufgabengruppe B

B I

1 In einer Fabrik werden Handy-Gehäuse in zwei Schichten produziert. 65% der Produktion stammen aus der Frühschicht. Von diesen sind 10% fehlerhaft. 8,5% der Gesamtproduktion sind fehlerhafte Handy-Gehäuse der Spätschicht. Interpretieren Sie diese relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

1.1 Erstellen Sie eine geeignete Vierfeldertafel und ermitteln Sie den Anteil der fehlerhaften Handy-Gehäuse von der Gesamtproduktion. (Ergebnis: 15%) (3 BE)

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein von der Spätschicht gefertigtes Gehäuse einwandfrei ist. (2 BE)

1.3 Untersuchen Sie, ob die Fehlerhaftigkeit des Gehäuses stochastisch unabhängig ist von der Produktion in Früh- oder Spätschicht. (2 BE)

1.4 Der Gesamtproduktion werden 600 Handy-Gehäuse entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr fehlerhafte Exemplare in dieser Stichprobe sind als man erwartet. (4 BE)

2 Trotz des Verbots von eingeschalteten Handys im Unterricht hat jeder fünfzehnte Schüler sein Handy auch während des Unterrichts eingeschaltet. In einer Schule wird eine Kontrolle des „Handy-Verbots" durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit für ein eingeschaltetes Handy wird mit $\frac{1}{15}$ angenommen.

2.1 Ermitteln Sie, wie viele Schüler mindestens kontrolliert werden müssen, damit mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Schüler mit eingeschaltetem Handy erwischt wird. (4 BE)

2.2 Es werden nacheinander 30 Schüler kontrolliert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: „Es werden genau drei Schüler mit eingeschaltetem Handy erwischt und diese direkt nacheinander".

B: „Es werden mindestens zwei eingeschaltete Handys gefunden."
C: „Der zehnte Schüler ist der vierte mit eingeschaltetem Handy." (8 BE)

3 Ein Jugendmagazin hat eine Auflage von 7500 Stück. Der neuesten Ausgabe liegt ein Fragebogen zum Handykonsum bei. Für die Rücksendung des ausgefüllten Fragebogens bedankt sich der Verlag mit einem Handyanhänger. Erfahrungsgemäß senden 10% der Leser einen ausgefüllten Fragebogen zurück.
Bestimmen Sie die Anzahl der Handyanhänger, die der Verlag mindestens vorrätig haben sollte, damit bei ausverkaufter Auflage die Anzahl der Handyanhänger mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit ausreicht. (6 BE)

4 Eine ältere Studie besagt, dass 65% aller Jugendlichen mit Handy eine Prepaid-Karte nutzen. Ein namhaftes Jugendmagazin ist der Meinung, dass sich dieser Anteil der Prepaid-Kartennutzer verändert hat. Es gibt deswegen einen Test in Auftrag, bei dem 500 Jugendliche mit Handy befragt werden.

4.1 Entwickeln Sie einen geeigneten (zweiseitigen) Test zur Überprüfung der Aussage der Studie und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich symmetrisch zum Erwartungswert auf dem 5% -Signifikanzniveau. (9 BE)

4.2 Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler 2. Art versteht. (2 BE)

1 Nach dem erfolgreichen Bestehen der Abschlussprüfung wird für die 600 Absolventen einer bayerischen Fach- und Berufsoberschule eine Abschlussfeier organisiert. Die Auslagen werden teilweise durch den Förderverein und teilweise aus dem Verkauf von Essensmarken finanziert. Erfahrungsgemäß kauft ein Absolvent mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,60 eine Essensmarke.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 370 Essensmarken an die Absolventen verkauft werden. (4 BE)

1.2 Die Essensmarken werden auch an geladene Gäste (Lehrer, Eltern und Verwandte der Absolventen) verkauft. Die Finanzierung des Festes gilt als gesichert, wenn insgesamt mindestens 800 Essensmarken verkauft werden. Ein Gast kauft erfahrungsgemäß eine Essensmarke mit der Wahrscheinlichkeit von 0,60. Berechnen Sie, wie viele Personen an der Feier mindestens teilnehmen müssen, damit die Finanzierung des Festes mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,80 gewährleistet ist. (8 BE)

2 Zusätzlich zum Verkauf von Essensmarken werden Lose verkauft. Ein Absolvent, der eine Essensmarke gekauft hat, kauft mit der Wahrscheinlichkeit von 0,50 ein Los. Insgesamt kaufen 58% der Absolventen ein Los. Weiterhin kauft ein Absolvent mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,60 eine Essensmarke.

2.1 Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein beliebig ausgewählter Absolvent weder eine Essensmarke noch ein Los kauft. (4 BE)

2.2 Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein beliebig ausgewählter Absolvent, der kein Los erworben hat, eine Essensmarke kauft. (3 BE)

2.3 Ein Los ist mit der Wahrscheinlichkeit von 0,40 ein Gewinnlos. Ermitteln Sie, wie viele Lose man mindestens kaufen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 wenigstens ein Gewinnlos dabei ist. (4 BE)

3 Für die Bühnendekoration stehen 9 Sonnenblumen und 7 Gladiolen in einer Vase bereit.

3.1 Diese Blumen werden rein zufällig in einer Reihe geordnet. Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei dieser Anordnung alle Sonnenblumen nebeneinander liegen und am Anfang und Ende der Reihe jeweils eine Gladiole liegt. (4 BE)

3.2 Für ein Blumengesteck werden aus den 16 Blumen rein zufällig 6 entnommen. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich in diesem Blumengesteck höchstens zwei Sonnenblumen befinden.(3 BE)

4 Die Schülersprecherin möchte eine Fotoagentur beauftragen, Freundschaftsbilder von jedem Absolventen anzufertigen. Die Agentur will den Auftrag annehmen, wenn mindestens 60% der Absolventen ein Bild kaufen. Die Entscheidung soll auf der Grundlage eines Signifikanztests getroffen werden, wobei 250 zufällig ausgewählte Absolventen befragt werden, ob sie ein Bild kaufen würden.

4.1 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Auftrag irrtümlich abgelehnt wird, soll höchstens 5% betragen. Bestimmen Sie für diesen Fall den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich. (6 BE)

4.2 Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Auftrag irrtümlich angenommen wird, obwohl insgesamt nur 50% aller Absolventen ein Bild kaufen, wenn ab 137 Kaufabsichten von 250 Befragten der Auftrag angenommen wird. (4 BE)