ABITURPRÜFUNG 2010 AN BERUFSOBERSCHULEN

UND FACHOBERSCHULEN

ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Dienstag, den 18. Mai 2010, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten; die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A
A I

1 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto \ln(\frac{x^2}{a-x^2})$ mit $a \in IR^+$ in der maximalen Definitionsmenge $D_a \subseteq IR$.

1.1 Bestimmen Sie D_a in Abhängigkeit von a, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und die Nullstellen von f_a. Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und damit die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f_a. (Teilergebnis: $D_a =]-\sqrt{a}\,;\ \sqrt{a}[\setminus \{0\}$) (10 BE)

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a.
(Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{2a}{x(a-x^2)}$) (5 BE)

In den folgenden Teilaufgaben ist a = 4.

1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_4. (5 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f_4 im Bereich $-2 < x < 2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2cm). Tragen Sie auch die Asymptoten ein. (4 BE)

1.5 Begründen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = f_4(x)$ und $D_g =]\,0\,;\,2\,[$ umkehrbar ist. Der Punkt $P'(0 \mid ?)$ liegt auf dem Graphen von g^{-1}. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P', ohne $g^{-1}(x)$ zu berechnen. (4 BE)

1.6 Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion g^{-1} und die zugehörige Definitionsmenge $D_{g^{-1}}$.

(Teilergebnis $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4e^x}{1+e^x}}$) (4 BE)

1.7 Rotiert der Graph von g um die y-Achse so entsteht ein Rotationskörper. Für $-\infty < y \leq 2$ erhält man einen Körper mit endlichem Volumeninhalt. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts dieses Körpers. (6 BE)

2 Für die Geschwindigkeit v(t) eines Körpers unter dem Einfluss einer zeitlich periodisch wirkenden Kraft und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft gilt folgende Differenzialgleichung:

$\dot{v}(t) + 2v(t) = \sin(2t)$. Der Körper soll zum Zeitpunkt t=0 aus der Ruhe heraus starten. Ermitteln Sie v(t) mithilfe der Methode der Variation der Konstanten. (10 BE)

3 Gegeben sind die Funktionen $k: x \mapsto 2\cdot\arctan(\sqrt{x^2-1})$ und $h: x \mapsto \arcsin(1-\frac{2}{x^2})$ in der maximalen gemeinsamen Definitionsmenge $D \subseteq IR$.

3.1 Zeigen Sie, dass die Funktionen k und h dieselbe maximale Definitionsmenge D besitzen, und geben Sie diese an. (4 BE)

3.2 Zeigen Sie, dass sich k(x) und h(x) jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden, und bestimmen Sie die Konstante für $x \geq 1$. (8 BE)

A II

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \frac{x^2-a^2}{ax^2}$ mit $a \in IR\setminus\{0\}$ in der von a unabhängigen Definitionsmenge $D_f = IR\setminus\{0\}$.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von f_a, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und die Werte von a, für welche die Wertemenge von f_a die Zahl 1 enthält. (5 BE)

1.2 Bestimmen Sie jeweils in Abhängigkeit von a das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und das Monotonieverhalten des Graphen von f_a. (6 BE)

1.3 Der Graph von $f_{0,75}$ und die Geraden mit den Gleichungen x = 0,75 und y = 1 begrenzen im I.Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (5 BE)

2 Gegeben ist weiter die Funktion $g: x \mapsto \arccos(f_1(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subseteq IR$. Dabei ist f_1 die Funktion f_a aus der Aufgabe 1 mit a=1.

2.1 Ermitteln Sie die Definitionsmenge D_g. (Ergebnis: $D_g = IR \setminus]-\sqrt{0,5}\ ;\ \sqrt{0,5}\,[$) (3 BE)

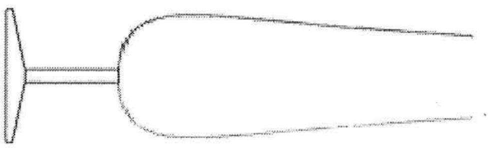
2.2 Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion g', das Verhalten der Funktionswerte $g'(x)$ an den Rändern von $D_{g'}$ und das Monotonieverhalten des Graphen von g. Geben Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von g an. (8 BE)

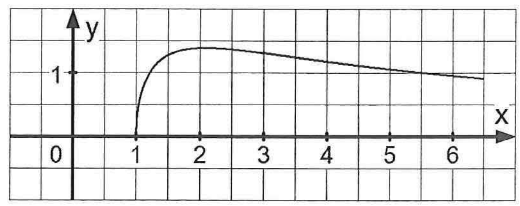
2.3 Zeichnen Sie den Graphen von g im Bereich $-4 \le x \le 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2cm). (4 BE)

2.4 Der Wert des Integrals $\int_1^3 g(x)dx$ soll näherungsweise bestimmt werden. Berechnen Sie dazu den arithmetischen Mittelwert aus Ober- und Untersumme bei Unterteilung des Integrationsintervalls in vier gleich große Teile auf drei Nachkommastellen genau. Veranschaulichen Sie die Rechnung, indem Sie die für die Berechnung der Obersumme verwendeten Rechtecke in die Zeichnung aus 2.3 eintragen. (5 BE)

2.5 Begründen Sie, dass die Funktion h mit h(x)=g(x) und $D_h = [\sqrt{0,5}\ ;\ +\infty[$ umkehrbar ist. Ermitteln Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion h^{-1} und die Gleichung der Tangente an den Graphen von h^{-1} an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$. (7 BE)

3 Die Innenkante des Querschnitts eines Glases (siehe Bild rechts) wird durch die Funktion $s : x \mapsto 5\sqrt{\ln(x)} \cdot (x+1)^{-1}$ (vgl. Graph rechts unten) beschrieben. Durch Rotation des Graphen um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper, welcher näherungsweise die Form eines solchen Glases beschreibt. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts im Bereich $1 \le x \le 6$ auf 2 Nachkommastellen. (Hinweis: Beginnen Sie mit partieller Integration.)





(9 BE)

4 Bestimmen Sie für $x \in IR$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' \cdot (x^2+1) = x(1-y)$ mit der Methode der Variation der Konstanten. (8 BE)

Aufgabengruppe B

B I

Die Firma Sparlux stellt Energiesparlampen in großer Anzahl her, die, je nachdem, wie genau sie die Nennleistung einhalten, zwei verschiedenen Güteklassen, entweder A oder B, angehören können. Langfristig haben 80% der hergestellten Lampen die Güte A, der Rest die Güte B. Äußerlich sind Lampen der beiden Güteklassen nicht zu unterscheiden.

1 Die Lampen werden zum Versand in quadratische Kartons mit gleichgroßen nummerierten Waben gelegt. Die Skizze zeigt den Grundriss eines 9er Kartons.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1.1 Berechnen Sie, auf wie viele verschiedene Weisen 7 Lampen in einen 9er Karton gepackt werden können, wenn
a) die Lampen nicht unterscheidbar sind,
b) alle Lampen verschieden gekennzeichnet sind (z.B. durch eine Seriennummer),
c) die Lampen nur die Güteklasse als Unterscheidungsmerkmal haben. (4 BE)

1.2 Genau zwei der Lampen in einem vollen 9er Karton haben Güteklasse B. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese beiden Lampen in Waben liegen, die jeweils eine gemeinsame Trennwand haben. (3 BE)

1.3 Berechnen Sie, wie viele Lampen ein Karton mindestens enthalten muss, damit die Wahrscheinlichkeit, darunter keine B-Lampe zu finden, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, dass man in dem Karton mindestens eine Lampe der Güte B vorfindet. (4 BE)

2 Ein Großkunde behauptet, dass der Anteil der B-Lampen größer als 20% geworden sei (Gegenhypothese) und verlangt deshalb einen Preisnachlass. Um dies in einem Signifikanztest auf dem Signifikanzniveau von 5% zu überprüfen, misst die Firma Sparlux bei 200 Lampen die Leistung möglichst genau nach. Ermitteln Sie die Mindestanzahl von Lampen der Güte A unter den 200 getesteten, ab der Sparlux dem Kunden den Preisnachlass verweigern wird. (6 BE)

3 Ein weiterer Großkunde benötigt mindestens 240 Lampen der Güte A.

3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Lieferung von 300 Lampen genau 240 die Güte A haben. (3 BE)

3.2 Berechnen Sie, wie viele Lampen der Großkunde mindestens bestellen muss, damit die Wahrscheinlichkeit größer als 95% ist, dass sich darunter wenigstens 240 Lampen der Güte A befinden. (8 BE)

4.1 Lampen der Güteklasse A, deren Anteil 80% beträgt, müssen die Nennleistung von 10,0 Watt mit einer maximalen Abweichung von $\pm 4\%$ genau einhalten. Die übrigen sind – obwohl voll funktionsfähig – der niederen Güteklasse B zugeordnet. Bei der Lampenleistung Y ist von einer normalverteilten Zufallsgröße mit $\mu = 10{,}0$ Watt auszugehen.
Berechnen Sie die Standardabweichung σ der Zufallsgröße Y, und bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällig ausgewählte Lampe eine Leistung von höchstens 9,2 Watt aufweist.
(Teilergebnis: $\sigma = 0{,}312$ Watt) (7 BE)

4.2 60% der Lampen werden mit großer E27 – Fassung, die restlichen 40% mit kleiner E14 -Fassung gefertigt. Durch Qualitätskontrollen wurde herausgefunden, dass 25% der E14 – Lampen die Güte B aufweisen. Alle Lampen der Güte B werden nach der Kontrolle in einem Container gesammelt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig dem Container entnommene Lampe die Fassungsgröße E27 aufweist. (5 BE)

B II

1 Auf dem Nürnberger Flughafen werden die zu transportierenden Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines dieser Gepäckstücke den Zielflughafen Palma de Mallorca hat, sei p.

1.1 Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinander folgenden Gepäckstücken höchstens eines den Zielflughafen Palma hat, sei 87,75%. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit p. (2 BE)

1.2 Nun werden 15 aufeinander folgende Gepäckstücke betrachtet. Bestimmen Sie für p=0,35 die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Genau fünf Gepäckstücke haben Palma als Ziel."
B: „Das fünfzehnte Gepäckstück ist das fünfte nach Palma."
C: „Genau fünf Gepäckstücke haben das Ziel Palma und liegen direkt hintereinander." (5 BE)

1.3 Es werden 2% der Gepäckstücke fehlgeleitet; von den fehlgeleiteten haben 15% das Ziel Palma. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Gepäckstück, welches das Ziel Palma hat, richtig weitergeleitet? Verwenden Sie p=0,35. (5 BE)

1.4 Für das Sortieren des Gepäcks auf der Basis von Mikrochips wird einer Fluggesellschaft ein Lesegerät angeboten, das eine Quote von weniger als 1% an Lesefehlern verspricht. Die Fluggesellschaft testet ihre Vermutung, dass die Fehlerquote beim Lesen mindestens 1% beträgt, an 4000 mit Mikrochips gekennzeichneten Gepäckstücken auf dem 5%-Signifikanzniveau. Bestimmen Sie Ablehnungs- und Annahmebereich der Nullhypothese. (7 BE)

2 Ein bestimmtes Modell eines mp3-Players hat einen Herstellungspreis von 55 €. Erfahrungsgemäß werden während der Garantiezeit 20% dieser mp3-Player reklamiert.
25% der reklamierten Player weisen einen geringen Schaden auf, dessen Reparatur durchschnittlich 9 € Kosten verursacht, bei 60% muss die Elektronik ausgetauscht werden, wofür 25 € Kosten anfallen. Die restlichen defekten mp3-Player werden einbehalten und vollständig durch neue ersetzt. Aus den einbehaltenen mp3-Playern gewinnt der Hersteller noch Ersatzteile im Wert von 10 €. Berechnen Sie, zu welchem Preis ein mp3-Player an den Großhändler verkauft werden muss, damit die Firma einen durchschnittlichen Gewinn von 13 € erzielt. (6 BE)

3 Eine Zeitschrift behauptet, dass 30% der Jugendlichen unter 18 Jahren einen mp3-Player besitzen. Eine Gruppe von Schülern zweifelt an dieser Aussage, wobei einige behaupten, dass der Anteil kleiner ist, andere diesen Anteil für höher einschätzen. In einer Umfrage werden 240 zufällig ausgewählte Jugendliche unter 18 Jahren befragt.
Legen Sie für einen zweiseitigen Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 5% die Testgröße fest, formulieren Sie die Hypothesen, und bestimmen Sie Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese. (7 BE)

4 Es wird behauptet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,15 ein Jugendlicher mindestens zwei mp3-Player besitzt. Es werden zuerst 100 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt. Liegt die Anzahl der Jugendlichen mit mindestens zwei mp3-Playern unter den 100 befragten mindestens bei 14, so wird die Behauptung angenommen. Liegt die Anzahl mindestens bei 11 aber höchstens bei 13, so wird eine zweite Umfrage bei 300 Jugendlichen durchgeführt. Beträgt hier die Anzahl der Jugendlichen mit mindestens zwei mp3-Playern mindestens 44, so wird die Behauptung ebenfalls angenommen, sonst abgelehnt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Behauptung bei dieser Vorgehensweise angenommen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit 0,15 beträgt, dass ein Jugendlicher mindestens zwei mp3-Player besitzt. (8 BE)