

ABITURPRÜFUNG 2011 AN BERUFSOBERSCHULEN
UND FACHOBERSCHULEN
ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN
HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

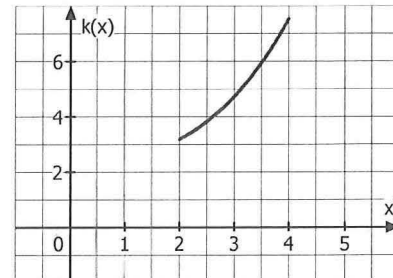
Mittwoch, den 1. Juni 2011, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den
Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A
A I

- 1 Gegeben ist die Funktion $g_a : x \mapsto \frac{2a \cdot e^x - a^2 - e^{2x}}{e^{2x}}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von g_a sowie deren Anzahl in Abhängigkeit von a . Bestimmen Sie das Verhalten von $g_a(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und die Gleichung der Asymptote des Graphen von g_a . (7 BE)
- 1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie Lage und Art möglicher Extrempunkte des Graphen von g_a in Abhängigkeit von a . (Teilergebnis: $g_a'(x) = 2a^2e^{-2x} - 2ae^{-x}$) (8 BE)
- 1.3 Zeichnen Sie den Graphen von g_1 im Bereich $-1 \leq x \leq 5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2cm). Tragen Sie auch die Asymptote ein. (Verwenden Sie dazu ein separates Blatt, x-Achse in Blattmitte!) (5 BE)
- 1.4 Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = g_1(x) = -(e^{-x} - 1)^2$ und $D_h = [0; +\infty[$.
- 1.4.1 Begründen Sie, dass die Funktion h umkehrbar ist, und berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion h^{-1} im Punkt $Q(-\frac{4}{9} | \ln(3))$, ohne den Funktionsterm $h^{-1}(x)$ zu bestimmen. (4 BE)
- 1.4.2 Ermitteln Sie nun den Term der Umkehrfunktion h^{-1} sowie deren Definitionsmenge. (5 BE)
- 1.5 Gegeben ist weiter die Integralfunktion G durch $G(x) = \int_{-1}^x g_1(t) dt$ mit $D_G = \mathbb{R}$.
- 1.5.1 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen von G sowie die Anzahl der Nullstellen von G . (4 BE)
- 1.5.2 Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $G(x)$. (4 BE)
- 1.6 Betrachtet wird nun die Funktion $f : x \mapsto \arccos(g_1(x))$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$.
- 1.6.1 Bestimmen Sie D_f . Geben Sie die Art und Lage der Extrempunkte des Graphen von f an und begründen Sie Ihre Aussagen. (8 BE)
- 1.6.2 Ermitteln Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ und zeichnen Sie den Graphen von f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.3. (4 BE)

- 2 Die Form eines speziellen Spritzgussteils entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion k mit $k(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 2}}$ und $D_k = [2; 4]$ um die x-Achse. Ermitteln Sie die Maßzahl des Volumeninhalts auf eine Nachkommastelle. (5 BE)



- 3 Ein spezieller Fallschirm gehorcht beim Sinkflug folgender Differenzialgleichung: $\dot{v} = \frac{1}{20}(25 - v^2)$. Dabei steht $v(t)$ für die Maßzahl der Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ mit $0 \leq v < 5$ und t für die Maßzahl der Zeit in s mit $t \geq 0$. Ermitteln Sie die spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung für $v(0) = 0$. (6 BE)

- 1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{a \cdot x}\right)$ mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}^+$.
- 1.1 Begründen Sie, dass D die in \mathbb{R} maximale Definitionsmenge von f_a ist, und untersuchen Sie, ob f_a Nullstellen besitzt. (5 BE)
- 1.2 Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D und begründen Sie, dass der Graph von f_a nur im I. Quadranten des Koordinatensystems verläuft. (5 BE)
- 1.3 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie die Koordinaten und Art des Extrempunktes in Abhängigkeit von a . (mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x \cdot (x^2 + a^2)}$) (7 BE)

In den folgenden Teilaufgaben wird $a = 1$ gesetzt.

- 1.4 Zeigen Sie, dass der Graph von f_1 genau einen Wendepunkt besitzt, und berechnen Sie dessen Koordinaten (Rundung auf 2 Dezimalen).
Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Bereich $0 < x \leq 5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2cm). (11 BE)

Gegeben ist weiter die Integralfunktion F durch $F(x) = \int_1^x f_1(t) dt$ mit $D_F = \mathbb{R}^+$.

- 1.5 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten, das Krümmungsverhalten und die x -Koordinate des Wendepunktes des Graphen von F sowie die Anzahl der Nullstellen von F , ohne die Integration durchzuführen. (6 BE)
- 1.6 Bestimmen Sie einen Näherungswert von $F(3)$ unter Verwendung einer Untersumme mit $\Delta x = 0,5$ auf zwei Nachkommastellen.
Ermitteln Sie dann eine integralfreie Darstellung von $F(x)$ und berechnen Sie $F(3)$ ebenfalls auf zwei Nachkommastellen. (8 BE)
- 2 Eine Kugel der Masse m befindet sich in einer Flüssigkeit und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus losgelassen. Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ hat die Kugel eine Strecke der Länge $s(t)$ durchfallen und besitzt zu diesem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{s}(t)$ sowie die Beschleunigung $a(t)$. Im Folgenden werden zur Vereinfachung nur die Maßzahlen der physikalischen Größen verwendet. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Kugel gilt die folgende Differenzialgleichung: $m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$, wobei g und k weitere physikalische Konstanten sind.
- 2.1 Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Methode der Variation der Konstanten. (9 BE)
- 2.2 Für $v(t)$ einer speziellen Kugel gilt $v(t) = 19,6 (1 - e^{-0,50 \cdot t})$ für $t \geq 0$.
- 2.2.1 Zum Zeitpunkt t_1 mit $t_1 \geq 0$ besitzt die Kugel die Beschleunigung $a_1 = \dot{v}(t_1)$. Zeigen Sie, dass die Zeitdauer T_H , in der sich die Beschleunigung a_1 halbiert, unabhängig von t_1 ist und berechnen Sie T_H . (6 BE)
- 2.2.2 Ermitteln Sie die Streckenlänge, welche die Kugel bis zum Zeitpunkt $t = 2,5$ durchfällt, auf eine Nachkommastelle. (3 BE)

Aufgabengruppe B

B I

- 1 Am Flughafen muss jeder Passagier durch eine Sicherheitsschleuse, in die ein Metalldetektor eingebaut ist. Das Gerät soll ein akustisches Signal von sich geben, wenn der Passagier Metall bei sich trägt. Vor dem Durchqueren der Sicherheitsschleuse soll jeder Passagier alle metallischen Gegenstände abgeben. Aus Erfahrung weiß man, dass 8% aller Passagiere nicht alle metallischen Gegenstände abgeben.
Der Metalldetektor funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit von 90% richtig, wenn ein Passagier noch Metall bei sich trägt. Wenn ein Passagier kein Metall bei sich trägt, gibt der Detektor mit der Wahrscheinlichkeit von 15% irrtümlicherweise ein akustisches Signal von sich.
 - 1.1 Ein Passagier geht durch die Sicherheitsschleuse.
 - a) Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit kein Signal ertönt.
 - b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Passagier noch einen metallischen Gegenstand bei sich hat, falls dabei das Signal des Metalldetektors ertönt. (6 BE)
 - 1.2 Es gehen zehn Passagiere nacheinander durch die Sicherheitsschleuse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ertönt dabei genau zweimal das Signal, und zwar bei zwei aufeinander folgenden Passagieren. (3 BE)
- 2 Die Fluggesellschaft „BOS Air“ hat Flugzeuge, die in der Economy-Class jeweils 460 Plätze besitzen. „BOS Air“ hat die Erfahrung gemacht, dass im Durchschnitt 8% aller Buchungen storniert werden. Daher nimmt „BOS Air“ für jeden Flug 495 Buchungen für die 460 Plätze der Economy-Class entgegen.
 - 2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 495 Buchungen für einen Flug genau 35 storniert werden. (2 BE)
 - 2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Flug die Anzahl der Plätze der Economy-Class nicht ausreicht. (4 BE)
 - 2.3 Für einen Flug der „BOS Air“ stehen 475 Fluggäste mit gültigem Ticket der Economy-Class zum Abflug bereit, darunter auch 25 Mitglieder eines Sportvereins. Die Fluggesellschaft „BOS Air“ wählt nun 15 der 475 Fluggäste zufällig aus und lässt diese ohne Aufpreis in der Business-Class mitfliegen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Mitglieder des Sportvereins in den Genuss der besseren Klasse kommen. (3 BE)
 - 2.4 Die Fluggesellschaft will ihr Risiko, dass bei einem Flug die Anzahl der Plätze in der Economy-Class nicht ausreicht, deutlich verringern. Dieses Risiko soll in Zukunft weniger als 1% betragen. Bestimmen Sie, wie viele Buchungen „BOS Air“ in Zukunft höchstens für die 460 Plätze der Economy-Class entgegennehmen darf. (9 BE)
- 3 Lange zurückliegende Umfragen in einem Land ergaben, dass höchstens 55% der Bevölkerung dieses Landes die Fluggesellschaft „BOS Air“ kennen. „BOS Air“ möchte einen höheren Bekanntheitsgrad haben. Um zu entscheiden, ob dazu eine Werbekampagne nötig ist, testet die Fluggesellschaft die Nullhypothese H_0 : „Der Anteil p der Personen, die diese Fluggesellschaft in dem Land kennen, beträgt höchstens 55%.“ durch eine neue Umfrage bei 2500 zufällig ausgewählten Personen dieses Landes. Das Signifikanzniveau des Tests soll 5% betragen.
Geben Sie für diesen Test die Testgröße und die Gegenhypothese an und ermitteln Sie den Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese. (8 BE)
- 4 Für einen Flug stehen zweimotorige und viermotorige Flugzeuge zur Auswahl. Jeder Motor dieser Flugzeuge funktioniert unabhängig von den anderen während eines Fluges mit der Wahrscheinlichkeit q nicht. Ein Flugzeug stürzt beim Flug ab, wenn mehr als die Hälfte der Motoren ausfällt.
Bestimmen Sie die Werte von q , für die bei einem Flug eine zweimotorige Maschine einer viermotorigen Maschine vorzuziehen ist. (5 BE)

B II

Für Triebwerke eines Raumtransporters werden Metallhülsen hergestellt, die mit sehr geringer Toleranz gefertigt werden müssen. Vom Hersteller der Hülsen werden dabei Pakete mit je 20 Hülsen an den Triebwerkshersteller geliefert.

- 1 Bei der Eingangskontrolle werden aus jeder Packung nacheinander ohne Zurücklegen zwei Teile entnommen und vermessen. Die Packung wird nur angenommen, wenn beide Teile innerhalb der Toleranz liegen, wobei jede Packung eine unbekannte Anzahl von Teilen enthält, die nicht innerhalb der Toleranz liegen. Diese Teile nennt man „nicht maßhaltig“.
- 1.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass solch eine Packung angenommen wird, wenn in ihr 1, 4 bzw. 7 nicht maßhaltige Teile enthalten sind und nehmen Sie zu dieser Art von Prüfung kurz Stellung. (Teilergebnis: $P_4 = 0,6316$) (5 BE)
- 1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von einer Lieferung aus 12 Paketen mindestens 10 angenommen werden, wenn jedes Paket 4 nicht maßhaltige Teile enthält. (3 BE)
- 2 Der Fehler einer Hülse kann zwei Gründe haben, entweder stimmt die Innenabmessung nicht (Mangel 1) oder die Außenabmessung ist falsch (Mangel 2). Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil nicht maßhaltig ist, beträgt 0,107. Dabei betragen die Wahrscheinlichkeiten, dass Mangel 1 auftritt, 0,050 und, dass nur Mangel 1 auftritt, 0,047.
- 2.1 Erstellen Sie aus diesen Angaben eine vollständige Vier-Felder-Tafel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Hülse mit dem Mangel 1 auch noch den Mangel 2 aufweist. (4 BE)
- 2.2 Untersuchen Sie, ob die beiden Mängel stochastisch unabhängig sind. (2 BE)
- 3 Vor der Endkontrolle sind weiterhin 10,7% der Hülsen nicht maßhaltig. Während der Endkontrolle wird eine Hülse mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,120 als Ausschuss aussortiert. Dabei wird allerdings auch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,030 eine maßhaltige Hülse als Ausschuss erfasst.
- 3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine nicht maßhaltige Hülse aussortiert wird. (5 BE)
- 3.2 Ermitteln Sie mit welcher Wahrscheinlichkeit eine aussortierte Hülse wirklich falsche Abmessungen besitzt. (3 BE)
- 4 Pro Tag prüft man 100 Hülsen, die aussortierten Teile werden in eine Gitterbox gelegt, die 30 Teile fasst. Die Wahrscheinlichkeit für die Aussortierung eines Teils beträgt 0,12. Bestimmen Sie die Anzahl der Tage, nach der die Gitterbox mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit voll ist. (7 BE)
- 5 Verantwortlich für die nicht maßhaltigen Hülsen ist die Werkzeugabnutzung bei der Herstellung. Ein neuer Werkzeugfabrikant verspricht eine Senkung der Wahrscheinlichkeit für eine nicht maßhaltige Hülse auf weniger als 7 % (Gegenhypothese). In einem einseitigen Test an 300 Teilen soll diese Behauptung überprüft werden.
- 5.1 Berechnen Sie den Ablehnungsbereich und den Annahmehereich der zugehörigen Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 1%. (7 BE)
- 5.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl die neuen Werkzeuge weiter mit einer Wahrscheinlichkeit von 10,7% fehlerhafte Teile produzieren, wenn die Nullhypothese bei bis zu 10 fehlerhaften Teilen abgelehnt wird. Kommentieren Sie das Ergebnis kurz. (4 BE)