

ABITURPRÜFUNG 2012 AN BERUFSOBERSCHULEN
UND FACHOBERSCHULEN
ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN
HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Freitag, den 25. Mai 2012, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den
Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A
A I

- 1 Gegeben ist die Funktion $f_m : x \mapsto \arctan(1 - \frac{2}{m \cdot x})$ mit $m \in \mathbb{R}^+$ in der von m unabhängigen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 - 1.1 Bestimmen Sie die Nullstelle von f_m in Abhängigkeit von m sowie das Verhalten von $f_m(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und die Gleichung der Asymptote des Graphen von f_m . (5 BE)
 - 1.2 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_m und entscheiden Sie, ob der Graph Extrempunkte besitzt. (7 BE)
(Teilergebnis: $f'_m(x) = \frac{m}{m^2 x^2 - 2mx + 2}$)
 - 1.3 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_m in Abhängigkeit von m . (7 BE)
 - 1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f_2 im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2cm). Tragen Sie auch die Asymptote ein. (4 BE)
 - 1.5 Begründen Sie, dass die Funktion k mit $k(x) = f_2(x)$ und $D_k = \mathbb{R}^+$ umkehrbar ist und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von k^{-1} im Punkt $P(0 | ?)$. Zeichnen Sie den Graphen von k^{-1} und die Tangente t in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.4 ein. (5 BE)

- 2 Gegeben ist weiter die Funktion $g: x \mapsto \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.
 - 2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von g . (7 BE)
(Teilergebnis: $g'(x) = \frac{2 - e^x}{2e^x \sqrt{e^x - 1}}$)
 - 2.2 Zeigen Sie, dass für $x > 0$ folgende Beziehung für $g(x)$ erfüllt ist: $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x - 1}} - g'(x)$, und ermitteln Sie damit eine Stammfunktion von g . (7 BE)

- 3 Gegeben ist nun die Funktion $h: x \mapsto x \cdot \sqrt{\sin(x)}$ mit $D_h = [0; \pi]$.
 - 3.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von h und das Verhalten von $h'(x)$ für $x \rightarrow \pi$. Welche Bedeutung hat dieses für den Graphen von h ? (4 BE)
 - 3.2 Bei der Rotation des Graphen von h um die x -Achse entsteht ein „tropfenförmiger“ Drehkörper. Berechnen Sie die Maßzahl V seines Volumeninhalts. (6 BE)

- 4 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$(x^2 + 4) \cdot y' = -8xy + 2x$$
 mit der Methode der Variation der Konstanten für $x \in \mathbb{R}$. (8 BE)

A II

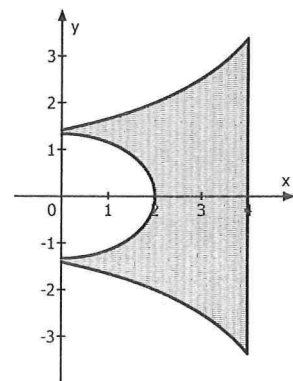
- 1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \frac{3}{2} \cdot \frac{ax^2 - 2}{3x^2 + a}$ mit der in \mathbb{R} maximalen Definitionsmenge D_{f_a} und $a \in \mathbb{R}$.
- 1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{f_a} sowie die Nullstellen von f_a und deren Anzahl jeweils in Abhängigkeit von a . (7 BE)
- 1.2 Geben Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a sowie Art und Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a an. (4 BE)
- 1.3 Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph der Funktion f_a über relative bzw. absolute Extrempunkte verfügt und ermitteln Sie gegebenenfalls Art und Koordinaten dieser Punkte. (8 BE)
- (Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{3x(a^2 + 6)}{(3x^2 + a)^2}$)

Für die folgenden Teilaufgaben gilt **$a = 3$** .

- 1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f_3 im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte $f_3(\pm 2)$. Tragen Sie auch die zugehörige Asymptote ein. (4 BE)
- 1.5 Gegeben ist die Funktion $F : x \mapsto \int_0^x f_3(t) dt$ mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$.
- 1.5.1 Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung des Funktionsterms $F(x)$. (4 BE)
- 1.5.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G_F der Funktion F . Runden Sie dabei gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen. (5 BE)
- 1.6 Gegeben ist weiter die Funktion $g : x \mapsto \arcsin(f_3(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subseteq \mathbb{R}$.
- 1.6.1 Geben Sie mit kurzer Begründung die Definitionsmenge D_g sowie die Nullstellen von g an. (3 BE)
- 1.6.2 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von g . (7 BE)

- 2 Rotiert die nebenstehende schraffierte Fläche um die x -Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Nach oben bzw. nach unten wird der Querschnitt durch die Funktionen $y = \pm \frac{\sqrt{98+x}}{7-x}$ und nach innen durch $y = \pm \frac{2}{3} \cdot \sqrt{4-x^2}$ begrenzt.

Berechnen Sie die Volumenmaßzahl des rotationssymmetrischen Körpers auf eine Nachkommastelle genau.



(9 BE)

- 3 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + y \cdot \tan(x) = e^x \cdot (\cos(x))^2$ mit der Methode der Variation der Konstanten für $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. (9 BE)

Während der Fußballweltmeisterschaft 2010 in Südafrika gelangte der Krake Paul aus dem Aquarium in Oberhausen zu großer Berühmtheit. „Orakel-Paul“ konnte den Ausgang von acht Spielen richtig voraussagen (die sieben deutschen Spiele und das Endspiel). Dabei musste er sich immer zwischen zwei Futterboxen entscheiden, die jeweils eine Miesmuschel und die Flagge einer der beiden aufeinandertreffenden Mannschaften enthielten. Bei der Befragung des Orakels wird davon ausgegangen, dass Krake Paul eine der beiden Boxen willkürlich wählt.

- 1 Beachten Sie, dass für die gesamte Aufgabe 1 aus Vereinfachungsgründen gilt: es gibt jeweils nur zwei Ausgänge (Sieg bzw. Niederlage), die gleichwahrscheinlich sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Unwissender (davon muss man bei Paul wohl ausgehen) beim Tippen des Ausgangs
 - a) von acht Fußballspielen genau sieben richtig tippt,
 - b) von acht Fußballspielen das erste und genau ein weiteres Spiel richtig tippt,
 - c) von den 64 Spielen der WM genau 32 richtig tippt,
 - d) von den 64 Spielen der WM mindestens 32 richtig tippt,
 - e) von den 64 Spielen der WM mindestens 26 aber höchstens 38 richtig tippt,
 - f) von den 306 Spielen einer Bundesligasaison genau 140 richtig tippt. (9 BE)
- 2 Die Voraussage des Orakels über den Ausgang des Endspiels wollten sich mehr als hundert Journalisten vor Ort ansehen, sie wurde von Fernsehkameras in viele Länder live übertragen. Durch den Besucherandrang bildeten sich lange Schlangen vor dem Aquarium. Eine Klasse mit 29 Schülern und 3 Lehrern musste in drei Gruppen aufgeteilt werden. Dabei bestanden die ersten beiden Gruppen aus je 12 Schülern, die restlichen Schüler waren in der letzten Gruppe. In jeder Gruppe war zusätzlich eine Lehrkraft. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, um die Gruppen nach obiger Vorschrift zu bilden. (3 BE)
- 3 Um die Popularität seines berühmten Bewohners auszunutzen, wollen die Aquariumbetreiber eine große Paul-Gummipuppe im Souvenirladen verkaufen. Dafür wurde ein Angebot von Hersteller A eingeholt, der Folgendes verspricht: Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10% entsprechen die Gummikraken nicht den strengen Anforderungen des Aquariums (Nullhypothese). Das Aquarium versucht nun mit Hilfe eines Signifikanztests auf dem Signifikanzniveau von 2,5% die Lieferung zu überprüfen und bestimmt dazu die Anzahl der fehlerhaften Exemplare von 150 Gummikraken.
 - 3.1 Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich und den Annahmehbereich der Nullhypothese. (6 BE)
 - 3.2 Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler 2. Art versteht, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, wenn in Wirklichkeit 25% der Kraken fehlerhaft sind. (4 BE)
 - 3.3 Für die Gewinner eines Preisausschreibens benötigt ein Zeitschriftenverlag 200 einwandfreie Gummikraken. Wie viele Gummikraken muss der Verlag mindestens kaufen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens 200 einwandfreie Stück erhält, wenn die Wahrscheinlichkeit einen fehlerhaften Kraken zu erhalten 10% beträgt. (7 BE)
- 4 Um die wartenden Besucher zu unterhalten wird auch eine Tombola organisiert. Die 2300 Lose sollen dabei dem Aquarium einen Gewinn von 2000,- € beschern. Es werden ein Hauptpreis, 100 mittlere Preise und 250 kleine Preise vergeben, wobei ausschließlich Geldpreise ausgeschüttet werden: ein mittlerer Preis ist 4mal so hoch wie ein kleiner Preis, und der Hauptpreis 25mal höher als der mittlere Preis.
 - 4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Y: „Gewinn der Kunden pro Los“, wenn ein Los 2,50 € kostet. Berechnen Sie den zugehörigen Erwartungswert und die Standardabweichung. (7 BE)
 - 4.2 Ein Besucher möchte mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein Gewinnlos haben. Berechnen Sie, wie viele Lose er mindestens kaufen muss. (4 BE)

Die Firma Draisrace hat sich auf die Herstellung von technisch hochwertigen Fahrrädern und Fahrradkomponenten für anspruchsvolle Kunden spezialisiert.

- 1 Von einem Zulieferer bezieht Draisrace Fahrradspeichen für Rennräder. Die Speichen werden in Packungen zu je 20 Stück geliefert. Ein Kontrolleur prüft aus jeder Packung zwei verschiedene Speichen. Er nimmt die Packung genau dann an, wenn beide Speichen in Ordnung sind. Die Anzahl der schadhafte Speichen in den Packungen ist nicht bekannt.
 - 1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kontrolleur eine solche Packung annimmt, wenn sie genau zwei schadhafte Speichen enthält. (Ergebnis: $p \approx 0,81$) (3 BE)
 - 1.2 Eine Lieferung mit 12 Packungen, von denen jede genau 2 schadhafte Speichen enthält, wird überprüft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
 E_1 : „Alle 12 Packungen werden angenommen.“
 E_2 : „Von den 12 Packungen nimmt er die erste, die letzte und genau zwei weitere nicht an.“ (3 BE)
 - 1.3 Berechnen Sie, wie viele Packungen mit zwei schadhaften Speichen Draisrace mindestens testen müsste, damit sie mit über 99% Wahrscheinlichkeit mindestens eine Packung annimmt. (4 BE)
- 2 Der Zulieferer der Rennradspeichen hat zwei Produktionslinien. 80% aller hergestellten Speichen entstammen der neueren Anlage A, der Rest der älteren Anlage B. Insgesamt beträgt der Anteil schadhafte hergestellter Speichen 8%, wobei von den in der neuen Anlage produzierten Speichen nur 2,2% schadhafte sind. Folgende Ereignisse werden definiert:
 A : „Eine zufällig entnommene Speiche entstammt der Anlage A.“
 S : „Eine zufällig entnommene Speiche ist schadhafte.“
 - 2.1 Berechnen Sie, wie viel Prozent der in der Anlage B produzierten Speichen schadhafte sind. (4 BE)
 - 2.2 Berechnen Sie $P_{\bar{S}}(A)$ und erklären Sie die Bedeutung von $P_{\bar{S}}(A)$ im Sinne der vorliegenden Thematik. (3 BE)
 - 2.3 Berechnen Sie, wie viele Packungen zu je 20 Speichen Draisrace mindestens bestellen muss, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens 95% ist, dass sich darunter mehr als 259 fehlerfreie Speichen befinden. (8 BE)
- 3 Der Zulieferer behauptet, dass aufgrund einer Produktionsumstellung höchstens 4% der gelieferten Rennradspeichen fehlerhaft sind. Die Firma Draisrace hält diesen Wert für zu gering und testet dazu 40 Packungen zu je 20 Stück auf dem 5%-Signifikanzniveau.
 - 3.1 Bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich und den Annahmehereich der Nullhypothese. (7 BE)
 - 3.2 Berechnen Sie für diesen Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich 8% der Speichen schadhafte sind. (4 BE)
- 4 Die Firma Draisrace tritt auch als Sponsor für ein Rennradteam auf. Umfangreiche Trainingsuntersuchungen haben ergeben, dass das Team im Mannschaftszeitfahren für eine bestimmte Strecke von 36 km durchschnittlich 45 Minuten benötigt. Die Fahrzeit sei normalverteilt mit einer Standardabweichung von 1,20 Minuten.
 Eine Trainingseinheit soll als „normal“ gelten, wenn die Fahrzeit um höchstens 90 Sekunden vom Erwartungswert abweicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig herausgegriffene Trainingsfahrt als „normal“ einzustufen ist. (4 BE)