

2916

**ABITURPRÜFUNG 2008  
ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN  
HOCHSCHULREIFE  
AN BERUFSOBERSCHULEN UND  
IM SCHULVERSUCH FOS 13**

**MATHEMATIK**

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Donnerstag, 05. Juni 2008, 09.00 Uhr bis 12.00 Uhr

**Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den  
Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;  
die Auswahl trifft die Schule**

## Aufgabengruppe A

## A I

- 1.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{2x^2 - 2}{e^x}$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ . Ihr Graph sei  $G_f$ .
- 1.1 Geben Sie die Schnittpunkte von  $G_f$  mit den Koordinatenachsen an. (3 BE)
- 1.2 Untersuchen Sie das Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  und geben Sie die Gleichung der Asymptote von  $G_f$  an. (4 BE)
- 1.3 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von  $G_f$ . Runden Sie die Ordinaten auf zwei Nachkommastellen. (9 BE)  
(Teilergebnis:  $f'(x) = \frac{-2x^2 + 4x + 2}{e^x}$ )
- 1.4 Zeichnen Sie  $G_f$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte im Intervall  $[-1, 2; 6]$  in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)
- 1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion  $F: x \mapsto -\frac{2 \cdot (x+1)^2}{e^x}$  mit  $D_F = \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist und berechnen Sie die exakte Flächenmaßzahl des Flächenstücks, das von  $G_f$  und der  $x$ -Achse unterhalb der  $x$ -Achse eingeschlossen wird. (5 BE)
- 1.6.0 Gegeben ist die Funktion  $g: x \mapsto \ln(f(x))$  mit maximaler Definitionsmenge  $D_g \subset \mathbb{R}$ . Ihr Graph ist  $G_g$ . Lösen Sie die folgenden Aufgaben möglichst unter Verwendung der Eigenschaften von  $f$ . (Aufgaben 1.1 – 1.4)
- 1.6.1 Geben Sie  $D_g$  an und begründen Sie, dass  $g$  nur genau eine Nullstelle hat. (4 BE)
- 1.6.2 Bestimmen Sie das Verhalten von  $g$  an den Rändern von  $D_g$ . (4 BE)
- 1.6.3 Untersuchen Sie  $G_g$  auf Extrempunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten und Art an. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

## Fortsetzung A I:

- 2.0 Zur Unterstützung der Stromversorgung einer Gemeinde wird in der Zeit von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr ein kleines Wasserkraftwerk zugeschaltet. Durch unterschiedlichen Wasserdurchfluss in  $\text{m}^3$  pro Minute ( $\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ ) kann die Stromabgabe an den Energiebedarf der Gemeinde angepasst werden. Der Wasserdurchfluss an einem bestimmten Tag wird in Abhängigkeit von der Tageszeit annähernd durch den Funktionsterm  $w(t) = 60 \cdot \frac{t+360}{2t+180}$  beschrieben. Dabei bedeutet  $t$  die Zeit in Minuten (min) von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr, das heißt  $D_w = [0; 360]$ . Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.
- 2.1 Berechnen Sie den Wasserdurchfluss um 13:00 Uhr und um 15:00 Uhr. (2 BE)
- 2.2 Ermitteln Sie, um welche Uhrzeit im betrachteten Zeitraum der Wasserdurchfluss und damit die Stromerzeugung des Elektrizitätswerkes am größten ist. (4 BE)
- 2.3.0 Das Integral  $\int_{t_1}^{t_2} w(t) dt$  gibt die in der Zeit von  $t_1$  bis  $t_2$  durchgeflossene Wassermenge an.
- 2.3.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von  $w$  auch in der Form  $w(t) = 60 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{135}{t+90} \right)$  schreiben lässt, und berechnen Sie  $W(t) = \int w(t) dt$ . (4 BE)
- 2.3.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $w$  in ein geeignetes Koordinatensystem. (Maßstab:  $t$ -Achse:  $1\text{cm} \triangleq 30\text{min}$ ;  $w$ -Achse:  $1\text{cm} \triangleq 10 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ ). (5 BE)
- 2.3.3 Entnehmen Sie aus der Zeichnung von 2.3.2 die Uhrzeit, zu der etwa die Hälfte der Wassermenge durchgeströmt ist, die von 12.00 Uhr bis 18.00 Uhr durchgeflossen ist. Überprüfen Sie Ihre Annahme durch Rechnung und kommentieren Sie das Ergebnis. (6 BE)

- 1.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{-x^3 + 6x^2 - 9x}{2(x-1)^2}$  in ihrer maximalen Definitionsmenge  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Ihr Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet.
- 1.1 Berechnen Sie die Nullstellen von  $f$  und geben Sie deren Vielfachheiten an. Untersuchen Sie das Verhalten von  $f(x)$  in der Umgebung der Definitionslücke und geben Sie die Art der Definitionslücke an. (6 BE)
- 1.2 Zeigen Sie:  $G_f$  besitzt eine schiefe Asymptote mit der Gleichung  $a(x) = -\frac{1}{2}x + 2$  und  $G_f$  verläuft für alle  $x \in D_f$  unterhalb dieser schiefen Asymptote. (5 BE)
- 1.3 Skizzieren Sie  $G_f$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und aller Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem. (Längeneinheit 1 cm.). (5 BE)
- 1.4  $A(b)$  ist die Maßzahl der Fläche, die von  $G_f$ , der  $x$ -Achse für  $x \geq 3$ , der schiefen Asymptote und der Geraden  $x = b$  mit  $b > 4$  eingeschlossen wird. Schraffieren Sie die gesuchte Fläche in der Zeichnung in Aufgabe 1.3, berechnen Sie die Maßzahl  $A(b)$  und untersuchen Sie, ob  $A(b)$  für  $b \rightarrow +\infty$  endlich ist. (8 BE)
- 2.0 Ein Studio für Ernährungsberatung erstellt nach dem Motto „Abnehmen braucht Zeit“ für einen Kunden eine persönliche Gewichtskurve für die geplante Diät. Die Funktion  $G(t) = 20 \cdot e^{-0,2t} + 70$  mit  $t \geq 0$  gibt näherungsweise das Gewicht in kg nach  $t$  Monaten an.  
Auf die Angabe von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.
- 2.1 Bestimmen Sie das Gewicht des Kunden zu Beginn der Diät und das Idealgewicht  $G_{\text{ideal}}$ , das der Kunde nach sehr langer Anwendung der Diät erreichen soll.  
(Teilergebnis:  $G_{\text{ideal}} = 70$  [kg]) (3 BE)
- 2.2 Ermitteln Sie, nach welcher Dauer  $t_1$  der Diät der Kunde nach diesem Plan 75% der angestrebten Gewichtsreduzierung erreichen wird. (3 BE)
- 2.3 Die vorgeschlagene Diät soll mit einer anderen Diät verglichen werden, bei der es angeblich möglich ist, die zu Beginn der Kur vorliegende Gewichtsabnahmerate  $G'(0)$  konstant bei zu behalten. Bestimmen Sie die sich dann ergebende Zeitspanne  $t_2$ , nach der das angestrebte Idealgewicht erreicht würde. (4 BE)

## Fortsetzung A II

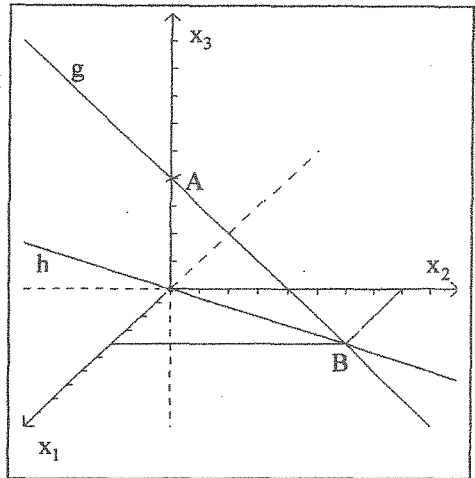
- 3.0 Gegeben ist die Funktion  $k: x \mapsto 8000 \cdot \frac{\ln(0,1x+1)}{0,1x+1}$  in der maximalen Definitionsmenge  $D_k \subset \mathbb{R}$ .
- 3.1 Bestimmen Sie  $D_k$  und die Nullstelle von  $k$ . (3 BE)
- 3.2 Untersuchen Sie das Verhalten von  $k(x)$  an den Rändern von  $D_k$ . (4 BE)
- 3.3.0 Die Funktion  $k$  beschreibt für  $x \in [0;100]$  in guter Näherung den durchschnittlichen täglichen Energiebedarf einer Person in Deutschland in Kilokalorien (kcal) in Abhängigkeit vom Lebensalter  $x$  in Jahren (a).  
Auf die Angabe von Einheiten wird verzichtet. Runden Sie alle Werte sinnvoll.
- 3.3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von  $k$  ohne Verwendung der 2. Ableitung von  $k$ .  
(Teilergebnis:  $k'(x) = 800 \cdot \frac{1 - \ln(0,1x+1)}{(0,1x+1)^2}$ ) (8 BE)
- 3.3.2 Zeichnen Sie den Graphen  $G_k$  für  $x \in [0;100]$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie der Funktionswerte  $k(35)$  und  $k(100)$  in ein Koordinatensystem.  
(Maßstab: x-Achse: 1cm  $\hat{=}$  10 a; y-Achse: 1cm  $\hat{=}$  500 kcal) (4 BE)
- 3.3.3 Zeigen Sie, dass  $K: x \rightarrow 40000 \cdot [\ln(0,1x+1)]^2$  mit  $D_K = D_k$  eine Stammfunktion von  $k$  ist und berechnen Sie  $I = \int_0^{80} k(x) dx$ . (4 BE)  
(Teilergebnis:  $I \approx 193112$ )
- 3.3.4 Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von 3.3.3 den mittleren täglichen Energiebedarf einer 80-jährigen Person im Laufe ihres Lebens. Zeichnen Sie diesen Wert sinnvoll in die Zeichnung von 3.3.2 ein und ermitteln Sie graphisch, in welchem Lebensalter dieser mittlere Energiebedarf benötigt wird. (3 BE)

## Aufgabengruppe B

## B I

- 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden  $g$  und  $h$  gegeben. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Geraden  $g$  und  $h$  im Schrägbild. (1 Teilstrich  $\hat{=}$  1 Einheit)

- 1.1 Durch die Geraden  $g = AB$  und  $h$  wird eine Ebene  $E$  bestimmt. Geben Sie eine Gleichung von  $g$  an und bestimmen Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform. (5 BE)  
(Zur Kontrolle:  $E: 2x_1 - x_2 = 0$ )



- 1.2 Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene  $F: x_1 + 0,5x_2 = 4$  mit den Koordinatenachsen und skizzieren Sie die Ebene  $F$  in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

- 1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen  $E$  und  $F$  durch Rechnung. Zeichnen Sie die Schnittgerade und die Ebene  $E$  in Ihre Skizze von 1.2 ein. (5 BE)

- 2.0 Die drei Sektoren einer Volkswirtschaft  $R$ ,  $S$  und  $T$  sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell gemäß der Inputmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & a & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,1 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ verflochten.}$$

- 2.1 Sektor  $R$  produziert 400 ME, Sektor  $T$  300 ME. Die Abgaben an den Markt sind wie folgt gegeben: Sektor  $R$ : 60 ME, Sektor  $S$ : 160 ME, Sektor  $T$ : 20 ME. Ermitteln Sie die Werte für  $a$  und  $b$  sowie die Produktionsmenge für den Sektor  $S$ . Zeichnen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm. (9 BE)

- 2.2 Für den kommenden Produktionszeitraum gilt für die oben stehende Inputmatrix  $a = 0,2$  und  $b = 0,1$ . Außerdem ist folgender Produktionsvektor vorgesehen:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 300 \\ 60 \cdot t \\ 1500/t \end{pmatrix}, \quad \text{wobei die reelle Zahl } t \text{ eine konjunkturabhängige Größe ist, für}$$

die gilt:  $t \in [6; 8]$ . Bestimmen Sie denjenigen Wert für  $t$ , für den die Summe der Marktabgaben aller drei Sektoren maximal wird. (6 BE)

## Fortsetzung B I

- 3.0 Ein Teehändler möchte eine hochwertige Teemischung zu einem Preis von 8,60 Euro je kg herstellen. Er verwendet dafür grünen Tee zum Preis von 11,00 Euro je kg, Roibuschtee zum Preis von 9,50 Euro je kg und Früchtetee zum Preis von 6,50 Euro je kg. Der Teehändler stellt immer 12 kg-Packungen solcher Teemischungen her.
- 3.1 Berechnen Sie, wie viel Früchte- bzw. Roibuschtee in einer 12 kg Packung sind, die 2 kg Grüntee enthält. (3 BE)
- 3.2 Ermitteln Sie, welche Mengen der drei Teesorten zu den oben genannten Preisen in einer beliebigen 12 kg-Packung überhaupt möglich sind. (6 BE)
- 3.3 Prüfen Sie, ob es eine 12 kg-Packung gibt, die durch Zusammenschütten kompletter Kilogrammpackchen von allen drei Teesorten entsteht. (2 BE)

- 1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $A(2|10|1)$ ,  $B(-1|13|4)$  und  $C_k(-8|k|7)$  mit  $k \in \mathbb{R}$  gegeben.
- 1.1 Stellen Sie fest, ob es Werte von  $k$  gibt, so dass  $A$ ,  $B$  und  $C_k$  auf einer Geraden liegen. (4 BE)
- 1.2 Die Ebene  $F$  wird durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C_2$  ( $k = 2$ ) aufgespannt. Bestimmen Sie je eine Gleichung von  $F$  in Parameter- und Koordinatenform.  
(mögliches Ergebnis:  $F: 7x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 3$ ) (5 BE)
- 1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden  $g$  zwischen der Ebene  $F$  und der  $x_2x_3$ -Koordinatenebene. (3 BE)
- 1.4.0 Gegeben ist die Ebenenschar  $E_a: (2+a)x_1 - x_2 + (3+a)x_3 = a$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .
- 1.4.1 Prüfen Sie, ob die Ebene  $F$  zu der Ebenenschar  $E_a$  gehört. (5 BE)
- 1.4.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Achsenschnittpunkte der Ebenenschar  $E_a$  in Abhängigkeit von  $a$ . (6 BE)
- 1.4.3 Untersuchen Sie die Lage der Geraden  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $r \in \mathbb{R}$  zur Ebene  $E_0$  (also  $a = 0$ ). (3 BE)
- 2.0 Die Zweigwerke  $U$ ,  $V$  und  $W$  eines Unternehmens und der Markt sind nach dem Leontief-Modell verflochten. Es gilt:  $E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,2 \\ -0,8 & 0,9 & -0,1 \\ -0,6 & -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix und  $A$  die Inputmatrix ist.
- 2.1 Erstellen Sie eine Input-Output-Tabelle für den Produktionsvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix}$ . (4 BE)
- 2.2 Aufgrund eines veränderten Nachfrageverhaltens ergibt sich folgende Situation:
- Werk  $U$  gibt doppelt so viele Mengeneinheiten (ME) an den Markt ab wie das Werk  $V$ ;
  - Werk  $W$  gibt 7 ME an den Markt ab;
  - die Gesamtproduktion im Werk  $W$  ist um 20 ME größer als im Werk  $U$ .
- Bestimmen Sie den Produktionsvektor und den Marktvektor. (7 BE)
- 2.3 Das Produkt von Werk  $V$  wird auf dem Markt nicht mehr nachgefragt. Die Markt- abgabe von Werk  $V$  wird deshalb eingestellt. Bestimmen Sie, welche Menge in Werk  $V$  bei einer Produktion von 55 ME in  $U$  und 100 ME in  $W$  trotzdem noch produziert werden muss. (3 BE)