ABITURPRÜFUNG 2009 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Freitag, 29. Mai 2009, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl trifft die Schule

Aufgabengruppe A

AI

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \ln((x+2)^2 + 4)$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie D_f, untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und bestimmen Sie ihr Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge. (4 BE)

1.2 Untersuchen Sie G_f auf Punkte mit horizontaler Tangente (Koordinaten und Art).
[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{4x+8}{x^2+4x+8}$] (5 BE)

1.3 Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente in dem Wendepunkt, der auf der y-Achse liegt. (9 BE)

1.4 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-8 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Tragen Sie auch die Wendetangente aus Aufgabe 1.3 in Ihre Zeichnung ein. (5 BE)

2.0 Wir betrachten nun die Funktion $g: x \mapsto g(x) = f'(x) = \frac{4x+8}{x^2+4x+8}$ mit $D_g = D_f$ (siehe Aufgabe 1.2). Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

2.1. Ermitteln Sie – unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 1 – die Nullstelle von g und die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_g. (6 BE)

2.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von G_g und zeichnen Sie G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-8 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.4. (5 BE)

2.3 Berechnen Sie in Abhängigkeit von c den Inhalt $A(c)$ der Fläche, die G_g mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = c$ $(c > -2)$ einschließt, und untersuchen Sie, ob $A(c)$ für $c \to \infty$ endlich ist. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

3.0 Eine bayerische Gemeinde gab 2006 im Vorfeld der Fortschreibung des Flächennutzungsplanes auf die kommenden Jahre eine Prognose für die Entwicklung der Einwohnerzahl in Auftrag. Das beauftragte Institut sollte aus folgendem Datensatz als mathematisches Modell eine reelle Funktion N(t) aufstellen, die die Einwohnerzahl N in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit 1995 annähernd beschreibt und deren Werte für die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab 2005 zugrunde gelegt werden sollen. Für den 1.1.1995 wird $t = 0$ gesetzt.
Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.

Jahr (Stand am 1.1.)	1995	.....	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Einwohnerzahl	14416	.....	15446	15631	15805	15966	16127	16286

3.1. Um einen geeigneten Ansatz zu finden, sind folgende Fragen zu beantworten. Die Antworten sind kurz zu begründen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Näherungsfunktion zu jedem Zeitpunkt die Eigenschaften hat, die sich aus den Werten der Tabelle ergeben.

A) Sollte die 1. Ableitung der Näherungsfunktion stets positiv oder negativ sein?

B) Sollte der Graph der Näherungsfunktion stets rechts- oder linksgekrümmt sein?

C) Hat die gesuchte Funktionsgleichung die Form $y = mx + b$? (4 BE)

3.2 Die Erkenntnisse von 3.1 legen nahe, den Ansatz für eine beschränkte Wachstumsfunktion der Form $N(t) = C - a \cdot e^{-kt}$ mit $C, a, k \in \mathbb{R}^+$ zu wählen.
Bestimmen Sie aus den Einwohnerzahlen der Jahre 2000 und 2005 die Werte für a und k, wenn gilt: $C = 20000$.
[Ergebnis: $N(t) = 20000 - 5584 \cdot e^{-0{,}04078t}$] (5 BE)

3.3 Überprüfen Sie, ob das Modell die Einwohnerzahl von 2003 richtig angibt und prognostizieren Sie mit Hilfe des Modells die Einwohnerzahl für 2030. (3 BE)

3.4 Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes von C im Sachzusammenhang.(2 BE)

3.5 Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung $\frac{dN}{dt} = \dot{N}(t)$ an der Stelle $t = 14$ und interpretieren Sie dessen Bedeutung. (3 BE)

3.6 Die Kanalisation der Gemeinde ist für ca. 19000 Einwohner ausgelegt. Berechnen Sie, wann gemäß dem Modell mit einer Überschreitung dieser Einwohnerzahl zu rechnen ist. (4 BE)

AII

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{6-6x}{(x+1)^2}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G_f.

1.1 Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Achsenschnittpunkte von G_f sowie die Art der Definitionslücke von f an. Ermitteln Sie das Verhalten von f (x) bei Annäherung an die Definitionslücke. (5 BE)

1.2 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph für $x \to +\infty$ seiner waagrechten Asymptote von oben oder unten annähert. (4 BE)

1.3 Untersuchen Sie G_f auf Extrempunkte und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Art und Koordinaten. (Teilergebnis: $f'(x) = \frac{6x-18}{(x+1)^3}$) (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_f nur unter Berücksichtigung der bisherigen Erkenntnisse ohne Berechnung weiterer Funktionswerte in dieses Koordinatensystem. (1 LE $\hat{=}$ 1 cm) (4 BE)

1.5 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm f(x) auch in der Form $f(x) = \frac{12}{(x+1)^2} - \frac{6}{x+1}$ darstellen lässt.

Verwenden Sie diese Darstellung des Funktionsterms dazu, das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ zu bestimmen und beschreiben Sie die geometrische Bedeutung des berechneten Wertes. (7 BE)

2.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 4 \cdot \ln(x) \cdot (2 - \ln(x))$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

2.1 Geben Sie D_g an, berechnen Sie alle Nullstellen von g und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g. (6 BE)

2.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von g und bestimmen Sie daraus die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von G_g.

(Teilergebnis: $g'(x) = \frac{8 \cdot (1 - \ln(x))}{x}$) (7 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Seit 1970 wird der weltweite Ausstoß eines bestimmten Schadstoffes gemessen, der im Verdacht steht, gesundheitsgefährdend zu sein. Eine Besorgnis erregende Zunahme des Schadstoffes hat zu vielfältigen wissenschaftlichen Untersuchungen der Thematik geführt. Die jährliche Emission dieses Schadstoffes betrug 1970 in den heutigen EU-Ländern 398 Mengeneinheiten (ME) und 1986 562 ME. Ein erstes Modell beschreibt für den Zeitpunkt t die EU-weite Emissionsrate des Schadstoffes in ME für den Zeitraum eines Jahres vor dem Zeitpunkt t durch die Funktion s_1 mit

$s_1(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ $(c, k \in \mathbb{R}^+)$. $t = 0$ steht für den Beginn des Jahres 1971.

Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.

3.1 Berechnen Sie aus den obigen Messwerten die Werte für c und k.

(Ergebnis: $c = 398$ [ME] und $k = 0{,}0216[\frac{1}{a}]$) (3 BE)

3.2 Bestimmen Sie das Jahr, in welchem sich nach diesem Modell die Emission des Schadstoffes in der EU gegenüber 1970 um 50% erhöht hätte. (4 BE)

3.3 Berechnen Sie das Integral $\int_0^{21} s_1(t)dt$ und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im Sinne der Thematik. (4 BE)

3.4.0 In den Jahren 1987 bis 1991 wurden in der EU neue gesetzliche Regelungen erarbeitet, da der Schadstoff als krebserregend erkannt wurde. Diese Regelungen wurden ab 1.1.1992 wirksam und sollten zu einer Entschärfung der Situation führen. Nach einem zweiten Modell sollte die künftige jährliche Emission des Schadstoffes in der EU nach der Funktion $s_2(t) = 1200 - 941 \cdot e^{-0{,}0235 \cdot t}$ (in ME) verlaufen.

Nun ist $s(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{für } t \leq 21 \\ s_2(t) & \text{für } t > 21 \end{cases}$

3.4.1 Zeigen Sie, dass die aus s_1 und s_2 auf diese Weise neu entstandene abschnittsweise definierte Funktion s – im Rahmen der hier möglichen Genauigkeit – an der „Nahtstelle“ $t_0 = 21$ stetig ist. (3 BE)

3.4.2 Zeigen Sie, dass trotz der neuen gesetzlichen Regelungen die Emission des Schadstoffes in der EU weiter zunimmt, die jährliche Zunahme jedoch geringer wird. (4 BE)

3.4.3 Untersuchen Sie das Verhalten von s(t) für die ferne Zukunft und interpretieren Sie das Verhalten im Sachzusammenhang.
Im Jahr 2007 betrug die reale Jahresemission des Schadstoffes in der EU 753 ME. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem durch die Funktion s vorhergesagten Wert und kommentieren Sie den Unterschied der Werte. (3 BE)

Aufgabengruppe B

BI

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $r,s,t \in \mathbb{R}$, und die

Ebene F: $-4x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ gegeben.

1.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
(Mögliches Ergebnis: $E: 8x_1 + 4x_2 - x_3 - 33 = 0$) (3 BE)

1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene E. (Ergebnis: $S(1|7|3)$) (3 BE)

1.3 Geben Sie die besondere Lage von F im Koordinatensystem an und bestimmen Sie die Schnittpunkte von F mit den Koordinatenachsen. (3 BE)

1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade h der Ebenen E und F.

(Mögliches Ergebnis: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0{,}25 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$). (4 BE)

1.5 Überprüfen Sie, ob der Punkt S aus Aufgabe 1.2 auf der Geraden h liegt, schließen Sie aus dem Ergebnis auf die gegenseitige Lage von g und h und fertigen Sie eine Skizze, aus der die gegenseitige Lage von E, g und h hervorgeht. (6 BE)

2.0 Die Länder A, B und C sind untereinander und mit dem Weltmarkt nach dem Leontief-Modell mit der Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ verflochten.

2.1 Interpretieren Sie die Bedeutung der Werte a_{11} und a_{21} der Inputmatrix A. (2 BE)

2.2 Erstellen Sie die Input-Output-Tabelle und zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm (Gozintograph) für den Produktionsvektor $\vec{x} = (100 \quad 160 \quad 200)^T$ (6 BE)

2.3 Eine Wirtschaftskrise in A führt dazu, dass A kurzzeitig keine Güter an den Weltmarkt liefern kann. Die Produktionsmengen von B und C sollen in diesem Zeitraum gleich groß sein. Berechnen Sie das Verhältnis der Produktionsmengen von C und A. Bestimmen Sie, wie viel Prozent ihrer Produktion B und C an den Weltmarkt abgeben können. (8 BE)

3 Drei 13. Klassen einer Fach- und Berufsoberschule gehen zu einem Imbissstand zum Essen und geben den Inhalt ihrer Klassenkassen von jeweils 108 € aus. Es werden drei Speisen angeboten: Leberkässemmel (L), Pizza (P) und Gyros (G). Die Tabelle zeigt die jeweils bestellten Mengen.
Berechnen Sie die Preise der einzelnen Speisen. (5 BE)

	L	P	G
13a	9	9	9
13b	5	9	11
13c	12	8	9

BII

1.0 Ein Apfelanbaubetrieb lässt sich in die drei Bereiche I: Produktion von Apfelsafterzeugnissen, II: Produktion von Apfelschnaps und III: Produktion von Apfelkonfekt einteilen. Diese Bereiche sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Gesamtproduktion dieses Jahres beträgt im Bereich I 3000 ME, in Bereich II 80 ME und in Bereich III 60 ME.

Die Inputmatrix ist gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 10 & 2 \\ 0 & 0,1 & 1 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$.

1.1 Deuten Sie den Wert des Elementes $a_{12} = 10$ und die Werte 0 in der Inputmatrix im Sachzusammenhang. (3 BE)

1.2 Bestimmen Sie die Input-Output-Tabelle dieses Jahres. (3 BE)

1.3 Im nächsten Jahr ist der Konsumvektor $\vec{y} = (5800 \quad 8 \quad 90)^T$ zu erwarten. Ermitteln Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$. (4 BE)

1.4 Um die gestiegene Nachfrage befriedigen zu können, pachtet der Bauer zusätzlich Streuobstwiesen, so dass die Produktion von Apfelsafterzeugnissen auf 14000 ME steigt. Ermitteln Sie, in welchem größten Intervall die Produktion von Apfelschnaps liegt, wenn die Produktion von Apfelkonfekt auf 540 ME steigen soll. (5 BE)

1.5 Der alte Bauer übergibt seinen Betrieb an seinen Sohn, der viel sparsamer produzieren möchte. Dadurch verändern sich die Werte a_{11}, a_{22} und a_{33} der Inputmatrix auf die Hälfte des bisherigen Wertes. Alle anderen Werte der Inputmatrix A bleiben unverändert. Berechnen Sie die Abgaben an den Markt, wenn die Produktion im Bereich I 14000 ME, im Bereich II 600 ME und im Bereich III 540 ME beträgt. (4 BE)

2.0 In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(1|-2|-1)$, $B(-2|1|2)$ und $C(2|3|0)$, die Ebene $F: 2x_1 + x_3 + 2 = 0$ und die Geradenschar

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } k, a \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

2.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen. (3 BE)

2.2 Die Punkte A, B und C legen eine Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform. (Mögliches Erg.: $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 1 = 0$) (5 BE)

2.3 Geben Sie die besondere Lage der Ebene F im Koordinatensystem an und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade s der beiden Ebenen E (aus 2.2) und F.

(Mögliches Ergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$) (6 BE)

2.4 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden s (aus 2.3) und h_a in Abhängigkeit von a. (7 BE)