

**ABITURPRÜFUNG 2010 ZUM ERWERB DER  
FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE  
AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN**

**MATHEMATIK**

**Nichttechnische Ausbildungsrichtungen**

**Dienstag, 18. Mai 2010, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr**

**Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den  
Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;  
die Auswahl trifft die Schule**

## Aufgabengruppe A

## AI

- 1.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto \frac{x^2 - x}{2x^2 - 5x + 3}$  in der maximalen Definitionsmenge  $D_f \subset \mathbb{R}$ .
- 1.1 Bestimmen Sie  $D_f$  und die Nullstelle von  $f$  und geben Sie die Art der Definitionslücken von  $f$  an. (8 BE)
- 1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion  $\tilde{f}: x \mapsto \frac{x}{2x-3}$  mit  $D_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$  die stetige Fortsetzung von  $f$  ist, und ermitteln Sie die Intervalle, für die gilt:  $\tilde{f}(x) > 0$  bzw.  $\tilde{f}(x) < 0$ . (4 BE)
- 1.3 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von  $\tilde{f}$  an, zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen  $G_{\tilde{f}}$  von  $\tilde{f}$  in das Koordinatensystem. (5 BE)
- 1.4 Zeigen Sie, dass sich der Term von  $\tilde{f}$  in der Form  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1,5}{2x-3}$  darstellen lässt und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die von der y-Achse, den Geraden  $y = \frac{1}{2}$  und  $x = 1$  und  $G_{\tilde{f}}$  begrenzt wird. (5 BE)
- 2.0 Nun ist die Funktion  $g: x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2x-3}\right)$  in der maximalen Definitionsmenge  $D_g \subset \mathbb{R}$  gegeben. Ihr Graph ist  $G_g$ .
- 2.1 Begründen Sie gegebenenfalls unter Verwendung von Aufgabe 1.2, dass gilt:  
 $D_g = \mathbb{R} \setminus [0; 1,5]$  (2 BE)
- 2.2 Untersuchen Sie das Verhalten von  $g$  an den Rändern von  $D_g$ . (4 BE)
- 2.3 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von  $G_g$  an und berechnen Sie die Nullstelle von  $g$ . (4 BE)
- 2.4 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von  $G_g$ .  
 (Zur Kontrolle:  $g'(x) = \frac{-3}{x(2x-3)}$ ) (7 BE)

Fortsetzung nächste Seite

## Fortsetzung AI

- 3.0 Für die Erprobung eines neuen Medikaments wird im Labor die Entwicklung einer Pilzkultur in einer Nährlösung unter dem Einfluss des Medikaments beobachtet. Man stellt fest, dass sich die Anzahl  $N$  der Pilze in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Stunden (h) durch folgende mathematische Funktion näherungsweise beschreiben lässt:

$$N: t \mapsto N_0 \cdot e^{(3t-t^2)} \text{ mit } t \geq 0.$$

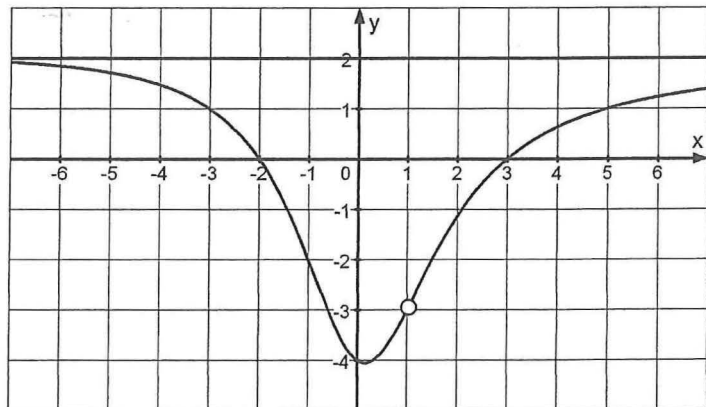
Dabei bedeutet  $N_0$  die anfänglich vorhandene Anzahl an Pilzen.

Für die Rechnungen kann auf die Verwendung von Benennungen verzichtet werden.

- 3.1 Die erste Zählung ergibt nach 30 Minuten 1745 Pilze. Bestimmen Sie damit die Anfangszahl  $N_0$ .  
(Ergebnis:  $N_0 = 500$ ) (2 BE)
- 3.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die maximale Anzahl von Pilzen vorhanden ist und bestimmen Sie diese maximale Anzahl.  
(Zur Kontrolle:  $\dot{N}(t) = 500 \cdot (3 - 2t) \cdot e^{(3t-t^2)}$ ) (5 BE)
- 3.3 Berechnen Sie den Zeitpunkt  $t_1$ , an dem die Kultur am stärksten wächst und den Zeitpunkt  $t_2$ , an dem die Kultur am stärksten abnimmt und geben Sie die Bedeutung dieser beiden Zeitpunkte für den Graphen der Funktion  $N$  an. (6 BE)
- 3.4 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Pilzkultur völlig abgestorben ist, das heißt weniger als ein Pilz vorhanden ist. (4 BE)
- 3.5 Skizzieren Sie den Graphen von  $N$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.  
(Maßstab:  $1\text{cm} \hat{=} 0,5\text{h}$ ;  $1\text{cm} \hat{=} 1000$  Pilze) (4 BE)

- 1.0 Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{2x}$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ . Ihr Graph ist  $G_f$ .
- 1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten und berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von  $G_f$ . Bestimmen Sie das Verhalten von  $f(x)$  für  $|x| \rightarrow \infty$  und geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von  $G_f$  an. (8 BE)
- 1.2 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion  $f$  echt monoton zunehmend bzw. echt monoton abnehmend ist, und bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von  $G_f$ .  
(Zur Kontrolle:  $f'(x) = 2(x^2 - x) \cdot e^{2x}$ ) (8 BE)
- 1.3 Zeichnen Sie  $G_f$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte für  $x \in [-1, 3]$  in ein kartesisches Koordinatensystem (Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 5 cm). (5 BE)
- 1.4 Gegeben ist die Funktion  $F: x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + bx + c) \cdot e^{2x}$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $D_F = D_f$ . Bestimmen Sie  $b$  und  $c$  so, dass  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Kennzeichnen Sie die Fläche, die  $G_f$  mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließt und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts. (Teilergebnis:  $b = -3$ ;  $c = 2,5$ ) (9 BE)

- 2.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion  $g$  mit seiner Asymptote. Der Graph besitzt bei  $(1|-3)$  ein „Loch“ und keine weiteren Definitionslücken. Alle Schnittstellen mit den Koordinatenachsen sind ganzzahlig.



- 2.1 Begründen Sie genau, zu welchem der nachfolgenden Funktionsterme der abgebildete Graph gehört.

$$g_1(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x-1)}$$

$$g_2(x) = \frac{2(x-2)(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2-1)}$$

$$g_3(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x-1)}{0,5(x-1)^2(x+1)}$$

$$g_4(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x^2+3)(x-1)}$$

$$g_5(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x^2+2)(x-1)}$$

(5 BE)

## Fortsetzung AII

- 2.2 Gegeben ist nun die Funktion  $h: x \mapsto \ln(g(x))$  in der maximalen Definitionsmenge  $D_h \subset \mathbb{R}$ , wobei der zu  $g$  gehörige Graph in 2.0 dargestellt ist. Geben Sie  $D_h$ , die Nullstellen von  $h$  und das Verhalten von  $h(x)$  im Unendlichen an. (5 BE)
- 3.0 Die Herstellungskosten  $k(x)$  (in Euro) pro Gerät eines bestimmten Plasma-Fernsehgerätes in Abhängigkeit von der Stückzahl  $x$  können durch die reelle Näherungsfunktion mit dem Funktionsterm
- $$k(x) = \frac{1100x + 120000}{2x + 3} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 50 \text{ beschrieben werden.}$$
- 3.1 Berechnen Sie die Herstellungskosten pro Fernsehgerät bei 100 bzw. 1000 produzierten Fernsehgeräten, und die Stückzahl, ab der die Herstellungskosten pro Gerät unter 600 € liegen. (5 BE)
- 3.2 Zeigen Sie, dass sich die Herstellungskosten eines Gerätes mit wachsender Stückzahl immer mehr verringern.  
(Zur Kontrolle:  $k'(x) = \frac{-236700}{(2x + 3)^2}$ ) (4 BE)
- 3.3 Ermitteln Sie  $k'(100)$  und  $k'(1000)$  und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. (4 BE)
- 3.4 Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x)$  und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (2 BE)
- 3.5 Zeichnen Sie den Graphen  $G_k$  von  $k$  und seine Asymptote für  $x \in [50; 1200]$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem. (5 BE)

## Aufgabengruppe B

## BI

- 1.0 Die drei Zweigwerke Bamberg (B), München (M) und Weiden (W) eines Unternehmens sind miteinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Verflechtungen sind der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen. Die Zahlenangaben erfolgen in Mengeneinheiten (ME).

	B	M	W	Markt
B	16	15	4	5
M	4	5	6	35
W	8	5	4	3

- 1.1 Bestimmen Sie die Inputmatrix A. (3 BE)
- 1.2 Nun sollen von Werk Bamberg 30 ME und von Werk Weiden 50 ME produziert werden. Berechnen Sie, in welchem Bereich die Produktion von Werk München dann liegen muss. (6 BE)
- 1.3 Die Produkte des Werkes München können am Markt nicht mehr abgesetzt werden. Deshalb sollen nur die Werke Bamberg und Weiden an den Markt liefern, wohingegen das Werk München nur als Zulieferer für die Werke des Unternehmens tätig sein soll. Werk Bamberg soll 22 ME an den Markt liefern. Werk München soll nur halb so viele Mengeneinheiten produzieren wie Werk Weiden.  
Berechnen Sie hierfür den Produktionsvektor und den Marktvektor. (7 BE)
- 2.0 Im  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A(1|-4|7)$ ,  $B(-3|4|-1)$ , die Ebene  $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5 = 0$  sowie die Geradenschar  

$$g_a: \vec{x} = \vec{OB} + k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a, k \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$
- 2.1 Die Gerade  $h = AB$  schneidet die Ebene E im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S und zeigen Sie, dass der Punkt B der Spiegelpunkt des Punktes A bezüglich S ist. (Teilergebnis:  $S(-1|0|3)$ ) (6 BE)
- 2.2 Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden  $g_a$  im Koordinatensystem in Abhängigkeit von a. (2 BE)
- 2.3 Bestimmen Sie a so, dass die zugehörige Gerade  $g_a$  echt parallel zur Ebene E verläuft. (Ergebnis:  $a = 2$ ) (4 BE)
- 2.4.0 Die Ebene F enthält die Geraden h aus 2.1 und  $g_2$ .
- 2.4.1 Ermitteln Sie je eine Gleichung von F in Parameter- und Koordinatenform. (Mögliches Ergebnis:  $F: -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 17 = 0$ ) (5 BE)
- 2.4.2 Die Gerade s ist die Schnittgerade der Ebenen E und F. Tragen Sie die Ebene F, die Geraden  $g_2$ , h und s sowie die Punkte A, B und S in eine Skizze ein und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s. (7 BE)

- 1.0 Im  $\mathbb{R}^3$  sind die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$  mit  $r \in \mathbb{R}$ , der Punkt  $P(1|4|1)$  und die Ebene  $F: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1$  gegeben.
- 1.1 Weisen Sie nach, dass durch die Gerade  $g$  und den Punkt  $P$  genau eine Ebene  $E$  bestimmt wird, und bestimmen Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform.  
(mögliches Ergebnis:  $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ ) (7 BE)
- 1.2 Bringen Sie die Ebene  $E$  in Achsenabschnittsform, geben Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an und zeichnen Sie die Ebene  $E$  in ein Koordinatensystem. (4 BE)
- 1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgerade  $s$  von  $E$  und  $F$ . (3 BE)
- 1.4 Zeichnen Sie  $F$  und  $s$  in das Koordinatensystem von 1.2. (2 BE)
- 2.0 Im  $\mathbb{R}^3$  sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ m \end{pmatrix}$  mit  $m \in \mathbb{R}$  gegeben.
- 2.1 Berechnen Sie, für welche Werte von  $m$  die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  bilden. (5 BE)
- 2.2 Stellen Sie für  $m=5$  den Vektor  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  dar. (3 BE)
- 3.0 Die drei Zweigwerke  $U$ ,  $V$  und  $W$  eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Die Inputmatrix ist gegeben durch  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0,15 & 0,02 \\ 0,125 & 0 & 0,08 \\ 0,20 & 0,05 & 0 \end{pmatrix}$ . Die derzeitige Produktion beträgt im Werk  $U$  400 Mengeneinheiten (ME), im Werk  $V$  600 ME, im Werk  $W$  500 ME.
- 3.1 Erläutern Sie die Bedeutung der Werte 0 in der Inputmatrix und erstellen Sie die Input-Output-Tabelle für das Unternehmen. (5 BE)
- 3.2 In der Urlaubszeit fährt das Werk  $W$  seine Produktion von 500 ME auf 220 ME herunter. Das Werk  $V$  soll weiterhin das 1,5-fache des Werkes  $U$  produzieren. Berechnen Sie die für das Werk  $U$  unter diesen Bedingungen möglichen Produktionsmengen. (5 BE)
- 3.3 Nach der Urlaubszeit soll die Produktion in Werk  $U$  wieder 80% der Produktion des Werkes  $W$  betragen. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung, unabhängig von der Produktion in Werk  $V$ , die Summe der Marktabgaben 80% der Gesamtproduktion aller drei Werke beträgt. (6 BE)