ABITURPRÜFUNG 2011 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Mittwoch, 1. Juni 2011, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten; die Auswahl trifft die Schule

AI

1.0 Gegeben ist die Funktion $f{:}x \mapsto \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

1.1 Bestimmen Sie D_f, die Gleichungen aller Asymptoten von G_f und geben Sie die Nullstelle von f an. (5 BE)

1.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f.
(Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$) (7 BE)

1.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer Funktionswerte für $-2 \le x \le 7$ in ein Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm) (5 BE)

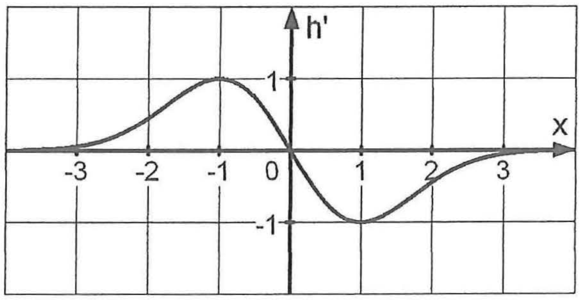
1.4 Der Graph G_f schließt mit der x-Achse, seiner schiefen Asymptote und der Geraden $x = 6$ ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (5 BE)

1.5.0 Im Weiteren wird die Funktion $g{:}x \mapsto \ln(f(x)) = \ln\left(\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right)$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Ihr Graph ist G_g. Zur Lösung der Aufgaben können die Ergebnisse der bisherigen Teilaufgaben verwendet werden.

1.5.1 Bestimmen Sie D_g, untersuchen Sie das Verhalten von g(x) an den Rändern von D_g und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an. (6 BE)

1.5.2 Bestimmen Sie die Nullstellen von g und skizzieren Sie den Graphen G_g mit anderer Farbe in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.3. (6 BE)

2 Eine Funktion h sei auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. In der Abbildung ist der **Graph der Ableitung h′** dargestellt. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen **zur Funktion h** richtig, falsch oder nicht entscheidbar sind. Falls Sie sich für richtig oder falsch entscheiden, begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.



(1) $h(x) \le 0$ für $0 \le x \le 3$

(2) An der Stelle $x = 0$ besitzt der Graph von h einen Hochpunkt.

(3) Der Graph von h besitzt bei $x = 1$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = 1$ ist. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

3.0 Durch starke Überfischung war der Fischbestand des Gelbflossenthuns im Südostatlantik stark gefährdet, worauf Verhandlungen über Schutzmaßnahmen aufgenommen wurden. Auf der Basis von Messungen der Fischpopulation wurde das folgende mathematische Modell entwickelt. Für den Bestand B (in Millionen Fischen) zum Zeitpunkt t (in Jahren) gilt:

$$B(t) \mapsto (at+b)e^{-0,15t} + 70 \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } a, b \in \mathbb{R}.$$

Die Zeit t wurde auf den 1.1.1995 bezogen.
Auf Einheiten wird bei der Rechnung verzichtet. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

3.1 Berechnen Sie die Werte für a und b, wenn am 1.1.2002 der Bestand den minimalen Wert von 35 Millionen Fischen erreicht hat.
(Ergebnis: $a = -15,\ b = 5$) (7 BE)

3.2 Berechnen Sie den Bestand des Gelbflossenthuns am 1.1.1995, bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion B für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (4 BE)

3.3 Berechnen Sie den Bestand am 1.7.2011 und die momentane jährliche Zunahme, die das Modell zu diesem Zeitpunkt liefert.
(Teilergebnis: $\dot{B}(t) = 2,25(t-7)e^{-0,15t}$) (5 BE)

3.4 Zeigen Sie, dass es nach diesem Modell einen Zeitpunkt größter Bestandszunahme gab, und berechnen Sie, in welchem Jahr dies der Fall war. (5 BE)

AII

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der zugehörige Graph heißt G_f.

1.1 Geben Sie D_f an, bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f und geben Sie die Gleichungen und Art aller Asymptoten an. (6 BE)

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_f.
(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-2x+8}{(x-1)^3}$) (8 BE)

1.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm) (5 BE)

1.4 Die Funktion $F: x \mapsto x + \ln(x-1)^2 + \frac{3}{x-1}$ mit $D_F = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ ist eine Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich). G_f und die Koordinatenachsen schließen im III. Quadranten ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts. (3 BE)

2.0 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = (x-4) \cdot \ln(x-3)$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie D_h und die Nullstelle von h sowie deren Vielfachheit. Untersuchen Sie das Verhalten von h(x) an den Rändern von D_h und geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_h an. (8 BE)

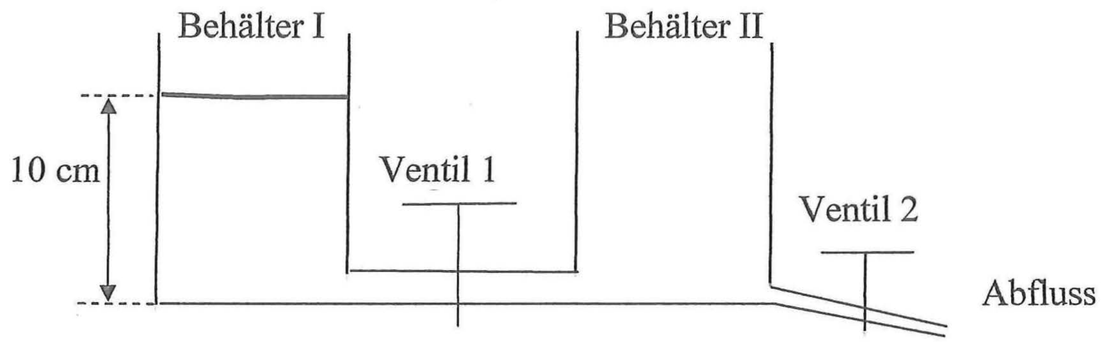
2.2 Weisen Sie nach, dass G_h an der Stelle $x = 4$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_h, schließen Sie daraus auf die Art des Extrempunktes von G_h und geben Sie die Wertemenge von h an.
(Teilergebnis: $h''(x) = \frac{x-2}{(x-3)^2}$) (10 BE)

2.3 Zeichnen Sie die Asymptote von G_h in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_h mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Gegeben sind zwei gleichartige Behälter, welche über ein Rohr miteinander verbunden sind. Am Anfang sind beide Ventile geschlossen und Behälter I hat einen Wasserstand von 10 cm, Behälter II enthält kein Wasser. Beim ersten Experiment wird zum Zeitpunkt t = 0 nur das Ventil 1 geöffnet. Der Wasserstand in Behälter II verhält sich entsprechend folgender Funktion:
$A_1(t) = 5 \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ mit $t \geq 0$, wobei $A_1(t)$ der Wasserstand (in cm) zum Zeitpunkt t ist. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen.
Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie alle Werte auf eine Nachkommastelle.



3.1 Zum Zeitpunkt $t = 8{,}0$ s beträgt der Wasserstand in Behälter II 4,0 cm. Bestimmen Sie daraus den Wert von k.
(Ergebnis: $k = 0{,}2$) (3 BE)

3.2 Berechnen Sie die Zeit, nach der in Behälter II der Wasserstand auf 2,0 cm angestiegen war. (3 BE)

3.3.0 Das Experiment wird noch einmal wiederholt, wobei jetzt auch der Abfluss hinter Behälter II (Ventil 2) geöffnet ist, durch den gleichmäßig eine bestimmte Menge Wasser abfließt. Die Funktion für den Wasserstand in Behälter II verändert sich nun wie folgt: $A_2(t) = 5 - 5 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} - 0{,}1t$ mit $0 \leq t \leq t_{leer}$.

3.3.1 Ermitteln Sie, welcher Wasserstand in Behälter II maximal erreicht wird. (6 BE)

3.3.2 In der Praxis lässt sich die Funktion $A_2(t)$ für $t > 30$ durch ihre schiefe Asymptote ersetzen. Geben Sie die Gleichung der schiefen Asymptote an und berechnen Sie damit näherungsweise den Zeitpunkt t_{leer}, zu dem der Behälter II wieder leer ist. (4 BE)

BI

1.0 In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(-5|2|7)$, $B(0|2|1)$, $C(2|1|-1)$ und $D(1|-1|1)$ gegeben.

1.1 Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, und $\overrightarrow{AD}$ und zeigen Sie, dass die vier Punkte die Eckpunkte eines Trapezes sind. Skizzieren Sie das Trapez und bezeichnen Sie die Eckpunkte. (6 BE)

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes M der beiden Trapezdiagonalen. (4 BE)

1.3 Durch die Punkte A, B, C und D ist die Ebene E festgelegt. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in parameterfreier Form. (Mögliches Teilergebnis: $E: 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 9 = 0$) (4 BE)

1.4 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit der x_1 – und der x_2 – Achse und stellen Sie damit die Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E mit der x_1x_2 – Ebene auf. (3 BE)

2.0 Drei Sektoren U, V, W eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell gemäß der nebenstehenden Input-Output-Tabelle verflochten. (Angaben in Mengeneinheiten ME)

	U	V	W	Markt	Produktion
U	x_{11}	0	72	78	250
V	50	x_{22}	0	110	200
W	100	20	x_{33}	72	240

2.1 Bestimmen Sie die Inputmatrix, die zu dieser Verflechtung gehört. (5 BE)

2.2 Berechnen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$, wenn die Marktabgabe $\vec{y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix}$ ermöglicht werden soll. (5 BE)

2.3 Für das nächste Jahr plant man in U eine Produktion von 300 ME, in V von 250 ME. Jeder Sektor soll so viel produzieren, dass von den Gütern jedes Sektors mindestens 30 ME an den Markt abgegeben werden können. Bestimmen Sie das Intervall, in dem sich die Produktion von W bewegen muss. (6 BE)

2.4 Im Folgenden hängt der Produktionsvektor von einer Variablen $a \in \mathbb{R}_0^+$ ab. Es gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 5a \end{pmatrix}$. Beim Verkauf am Markt erzielt man bei den Gütern von U 10 GE (Geldeinheiten), von V 15 GE und von W 20 GE je ME.

Bestimmen Sie a so, dass die Gesamteinnahmen einen Maximalwert annehmen. (7 BE)

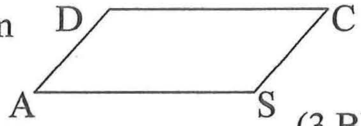
BII

1.0 In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(1|0|2)$, $B(1|3|-2)$ und $C(0|6|-4)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Parameterform und in parameterfreier Form.
(Mögliches Teilergebnis: $E: 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 12 = 0$) (5 BE)

1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene E. (Ergebnis: $S(2|0|0)$) (3 BE)

1.3.0 Die Punkte A, S und C bilden zusammen mit einem Punkt D das Parallelogramm ASCD. (siehe Skizze)



1.3.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D. (3 BE)

1.3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M des Parallelogramms ASCD. (3 BE)

1.3.3 Gegeben ist die Menge aller Punkte
$P = \left\{ (p_1 | p_2 | p_3) \middle| \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AS} + u \cdot \overrightarrow{SC} \text{ mit } t,u \in [0;1] \right\}$. Übertragen Sie das Parallelogramm auf Ihr Blatt und beschreiben und kennzeichnen Sie die Punktmenge P. (3 BE)

1.3.4 Überprüfen Sie, ob der Punkt B zur Punktemenge P gehört und zeichnen Sie B in die Skizze von 1.3.3 ein. (5 BE)

2.0 Die drei Werke R, S und T eines Chemieunternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten.
Die Inputmatrix der Verflechtung ist $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

2.1 Berechnen Sie die Marktabgaben der Werke R, S und T, wenn von R 800 Mengeneinheiten (ME), von S 520 ME und von T 450 ME produziert werden, und erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle. (5 BE)

2.2 Aufgrund wirtschaftlicher Probleme soll die Produktion im Werk T um a Mengeneinheiten verringert werden, während die Produktionseinheiten der Werke R und S unverändert bleiben sollen. Bestimmen Sie den maximal möglichen Wert von a. (5 BE)

2.3 Im kommenden Produktionszeitraum wird mit dem Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 362 \\ 149 \\ 113 \end{pmatrix}$ gerechnet. Bestimmen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$. (4BE)

2.4 Untersuchen Sie allgemein, unter welcher Bedingung gilt: „Werk R gibt 70% seiner Produktion an den Markt ab.“ (4 BE)