ABITURPRÜFUNG 2012 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Freitag, 25. Mai 2012, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl trifft die Schule

AI

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \to \frac{(x-3)(x+2)}{2x^2-8x+6}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Nullstelle sowie die Art der Definitionslücken von f an. (6 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{f}: x \to \frac{x+2}{2x-2}$ mit $D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ die stetige Fortsetzung von f ist. Untersuchen Sie das Verhalten von $\tilde{f}$ in der Umgebung ihrer Definitionslücke und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten des Graphen $G_{\tilde{f}}$ von $\tilde{f}$ an. (5 BE)

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von $G_{\tilde{f}}$ und geben Sie die Wertemenge von $\tilde{f}$ an.
(Zur Kontrolle $\tilde{f}'(x) = \frac{-3}{2(x-1)^2}$) (6 BE)

1.4 Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen $G_{\tilde{f}}$ im Punkt $P(2 \mid \tilde{f}(2))$ und bestimmen Sie die Koordinaten des weiteren Punktes R von $G_{\tilde{f}}$, in welchem der Graph $G_{\tilde{f}}$ die gleiche Steigung wie die Tangente t besitzt. (6 BE)

1.5 Zeichnen Sie die Asymptoten und die beiden Tangenten in den Punkten P und R in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie $G_{\tilde{f}}$ mit Hilfe der vorliegenden Ergebnisse in die Zeichnung. (6 BE)

1.6 Zeigen Sie, dass sich $\tilde{f}$ in der Form $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x-2}$ schreiben lässt, und ermitteln Sie die Gleichung einer Stammfunktion F von $\tilde{f}$. Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl des Flächenstücks, das $G_{\tilde{f}}$ im III. Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt. (6 BE)

1.7 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(\tilde{f}(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Geben Sie D_g an und bestimmen Sie die Nullstelle von g. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

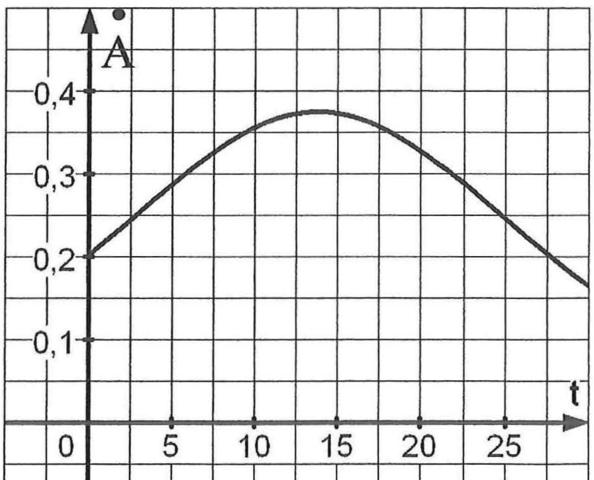
2.0 Bei der Weinerzeugung kann man während des Gärprozesses den aktuellen Alkoholgehalt des Mostes näherungsweise mit der Funktion $A(t) = \frac{100}{8 + b \cdot e^{c \cdot t}}$ berechnen, t ist dabei die Dauer des Gärprozesses in Tagen mit $t \geq 0$, b und c sind reelle Konstanten mit $b > 0$ und $c < 0$. A(t) gibt den Alkoholgehalt in Volumenprozent an. Je nach den Gegebenheiten im Gärkeller variieren b und c. Bei der Rechnung kann auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie die Ergebnisse sinnvoll.

2.1 Der Traubenmost des Winzers Müller hat bereits zu Beginn des Gärprozesses im Keller einen Alkoholgehalt von 2,00 %. Nach 20 Tagen beträgt der Alkoholgehalt genau 8,46 %.
Bestimmen Sie damit die Werte b und c.
(Ergebnis: $b = 42,\ c = -0{,}12$) (6 BE)

2.2 Nach 40 Tagen wird der Gärvorgang abgebrochen. Berechnen Sie den Alkoholgehalt des dann fertigen Weins. Ermitteln Sie den Alkoholgehalt, der sich nach sehr langer Zeit einstellen würde. (4 BE)

2.3 Im Herbst wird der junge Wein („Federweißer“) ausgeschenkt, dessen Alkoholgehalt höchstens 10% beträgt. Berechnen Sie, bis zu welchem Tag nach Beginn des Gärprozesses der Federweiße ausgeschenkt werden kann. (4 BE)

2.4 Bestimmen Sie die Ableitung $\frac{dA}{dt} = \dot{A}(t)$ und zeigen Sie, dass der Alkoholgehalt des Weins ständig zunimmt. (3 BE)



2.5 Der Graph der Ableitung $\dot{A}$ ist nebenstehend abgebildet. Machen Sie mit Hilfe des Graphen möglichst genaue und begründete Aussagen über die Entwicklung des Alkoholgehalts des Weins. Entnehmen Sie aus der Zeichnung die Koordinaten des Hochpunktes von $\dot{A}$ und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang. (4 BE)

AII

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $g: x \mapsto \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

1.1 Geben Sie D_g an, berechnen Sie die Nullstelle von g und geben Sie deren Vielfachheit an. Untersuchen Sie das Verhalten von g(x) an den Rändern von D_g und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an. (8 BE)

1.2 Geben Sie gegebenenfalls unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 1.1 die Koordinaten des einzigen Extrempunktes von G_g an und ermitteln Sie dessen Art. (4 BE)

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von g mit seiner waagrechten Asymptote. (3 BE)

1.4 Zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_g mithilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse in die Zeichnung. (5 BE)

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{2 \cdot \ln(x) + 1}{x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

2.1 Bestimmen Sie D_f und die Nullstellen von f. Untersuchen Sie das Verhalten von f(x) an den Rändern von D_f und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an. (8 BE)

2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und bestimmen Sie die Art und die exakten Koordinaten des Extrempunktes von G_f.

(Zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{-2 \cdot \ln(x) + 1}{x^2}$) (7 BE)

2.3 Nehmen Sie ohne weitere Rechnung aber mit Begründung Stellung zu der Aussage: „Der Graph G_f besitzt einen Wendepunkt.“ Begründen Sie Ihre Aussage. (3 BE)

2.4 Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Ein großer Elektronik-Konzern hat in einer Untersuchung die Wartezeiten auf eine freie Telefonleitung bei seinem Callcenter erfasst. Die Funktion W_k gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, mit der höchstens t Minuten (min) auf eine freie Telefonleitung gewartet werden muss.
Es gilt: $W_k(t) = 1 - e^{-kt}$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{R}^+$. Der Wert von k ist von der Tageszeit abhängig.
Bei der Rechnung kann auf Einheiten verzichtet werden.

3.1 Berechnen Sie für $k_1 = \frac{1}{60}\frac{1}{\text{min}}$, $k_2 = \frac{1}{12}\frac{1}{\text{min}}$ und $k_3 = \frac{1}{6}\frac{1}{\text{min}}$ die Wahrscheinlichkeit in Prozent, höchstens 5 Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen, und folgern Sie hieraus die Bedeutung des Parameters k für die Wartezeit. (5 BE)

3.2 Bestimmen Sie den Wert k in der Einheit $\frac{1}{\text{min}}$, für den die Wahrscheinlichkeit 95% beträgt, dass ein Anrufer nach höchstens 10 Minuten auf eine freie Leitung durchgestellt wird. (3 BE)

3.3 Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\infty} W_k(t)$ und $\lim\limits_{k\to\infty}(1 - e^{-kt})$ und beschreiben Sie möglichst einfach deren Bedeutung. (4 BE)

3.4 Sei nun $k = 0{,}1\frac{1}{\text{min}}$.

Die durchschnittliche Wartezeit $\overline{T}$ berechnet sich als $\overline{T} = \int\limits_0^{\infty} t \cdot \dot{W}_{0,1}(t)dt$. Zeigen Sie, dass $G(t) = -e^{-0,1t} \cdot (t+10)$ eine Stammfunktion von $t \cdot \dot{W}_{0,1}(t)$ ist. Berechnen Sie $\overline{T}$ und die Wahrscheinlichkeit, höchstens $\overline{T}$ Minuten auf eine freie Leitung warten zu müssen. (6 BE)

BI

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\13\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\text{ die Ebene } E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}\text{ mit } r,t,u\in\mathbb{R}$$

und die Ebenenschar $F_m: 4x_1 - x_2 + (m-1)\cdot x_3 = 0$ mit $m\in\mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
(Mögliches Ergebnis: $E: 9x_1 - x_2 + 11x_3 + 15 = 0$) (3 BE)

1.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und E. (3 BE)

1.3 Gegeben sind die Punkte $P(-1|3|7)$ und $Q(2|a|b)$ mit $a,b\in\mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, für welche die Gerade g und die Gerade durch P und Q echt parallel sind. (5 BE)

1.4 Begründen Sie, dass jede Ebene der Schar F_m die Ebene E in einer Schnittgeraden s_m schneidet. Ermitteln Sie sodann die Gleichung von s_2 (also $m=2$). (6 BE)

1.5 Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene F_1 (also $m=1$) im Koordinatensystem. Skizzieren Sie F_1 in ein Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung von F_1 in Parameterform an. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung BI

2.0 In einer Pflegeeinrichtung sind die Teilbereiche mobile Pflegedienste (M), Verwaltung (V) und technische Dienste (T) untereinander und mit dem Markt für Pflegeleistungen nach dem Leontief-Modell verflochten. Statt Mengeneinheiten werden Arbeitseinheiten (AE) betrachtet, der Marktvektor beschreibt die Pflegezeit an den Pflegebedürftigen (= Arbeitszeit, die direkt für die Pflegebedürftigen aufgewendet wird) und der Produktionsvektor die Gesamtarbeitseinheiten in den unterschiedlichen Teilbereichen. Im Folgenden wird deshalb vom Pflegevektor $\vec{y}$ und vom Gesamtarbeitsvektor $\vec{x}$ gesprochen. Für die Verflechtung von M, V und T ergibt sich die Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

2.1 Interpretieren Sie die Bedeutung der Werte a_{22} und a_{31} der Inputmatrix A. (2 BE)

2.2 Bestimmen Sie den Gesamtarbeitsvektor $\vec{x}$ für den Pflegevektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 64 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. (5 BE)

2.3 Die Pflegeeinrichtung soll einen weiteren Pflegebezirk übernehmen. Dabei werden die Gesamtarbeitseinheiten der Verwaltung doppelt so groß sein wie die für den technischen Dienst. Die mobilen Pflegedienste steigen auf 231 Gesamtarbeitseinheiten. Aus Kostengründen soll die Verwaltung höchstens 11 AE Pflegezeit an den Pflegebedürftigen erhalten. Berechnen Sie das sinnvolle Intervall für die Gesamtarbeitseinheiten der Verwaltung. (6 BE)

2.4 Die Pflegeeinrichtung betreibt auch Pflegeheime (stationäre Pflegedienste). In den stationären Pflegediensten (S) ist der Einsatz der Verwaltung um 40% geringer gegenüber den mobilen Pflegediensten, der Einsatz der Technik für die stationären Pflegedienste verdoppelt sich gegenüber den mobilen Pflegediensten. Alle anderen Werte der Inputmatrix bleiben unverändert. Geben Sie die neue Inputmatrix an und erstellen Sie die Input-Output-Tabelle für den Gesamtarbeitsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$. (5 BE)

BII

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(2|1|0), B(3|-2|-0{,}5)$ und $C(-2|-2|2)$ sowie die Geraden $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, welche die Punkte A, B und C enthält, in parameterfreier Form.
(Mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_3 - 2 = 0$) (5 BE)

1.2 Geben Sie die Lage der Ebene E bezüglich des Koordinatensystems an und verdeutlichen Sie diese Lage durch eine möglichst aussagekräftige Skizze, welche auch die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von E enthält. (5 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Lage von g_t gegenüber E in Abhängigkeit von t. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an. (5 BE)

1.4 Die Geraden g_t liegen alle in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Parameterform und geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F an. (4 BE)

2.0 Eine Molkerei (M), ein Unternehmen (U), welches einfache Milchprodukte veredelt, und ein landwirtschaftlicher Hof (H) sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell gemäß nebenstehender Tabelle verknüpft. (Angaben in Mengeneinheiten ME)

	M	U	H	Markt	Produktion
M	20	50	5	25	a
U	b	40	0	200	250
H	40	0	10	c	50

2.1 Bestimmen Sie die Werte für a, b und c und geben Sie die Bedeutung der Werte von b und c im Sinne der vorliegenden Thematik an. (4 BE)

2.2 Die Molkerei will nun ihre Marktabgabe auf 86 ME erhöhen. Die anderen Betriebe behalten ihre Marktabgabezahlen bei. Bestimmen Sie die hierfür notwendigen Produktionszahlen der drei Betriebe. (8 BE)

2.3.0 Der landwirtschaftliche Hof ist nicht in der Lage, die unter 2.2 berechnete Produktionssteigerung zu leisten. Für diesen ist maximal eine Erhöhung auf 60 Mengeneinheiten möglich. Das Unternehmen U erhöht seine Produktion auf 255 Mengeneinheiten.

2.3.1 Bestimmen Sie rechnerisch das maximale Intervall, welches für die Produktionszahl der Molkerei in Frage kommt.
(Ergebnis: $x_1 \in [71{,}25; 120]$) (5 BE)

2.3.2 Bestimmen Sie die unter den gegebenen Bedingungen maximal mögliche Marktabgabe der Molkerei und die dadurch bedingten Marktabgabezahlen der beiden anderen Betriebe. Ermitteln Sie den Prozentsatz, um welchen die Molkerei somit ihre Marktabgabe gegenüber der Abgabe in 2.0 maximal steigern könnte. (4 BE)