Abiturprüfung 2009

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

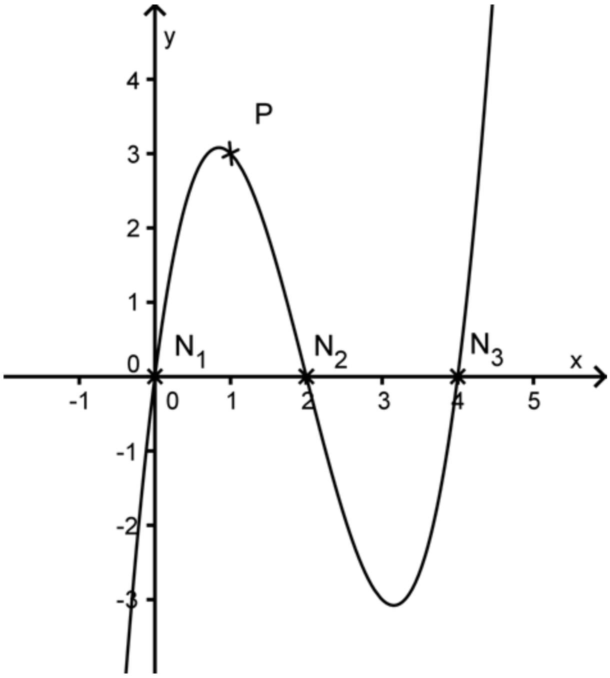
Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

1. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Die in der Abbildung angegebenen Punkte $P(1|3)$, $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$ und $N_3(4|0)$ sind Punkte von G_f.



5 a) Geben Sie den Funktionsterm von f in der Form $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$ an, indem Sie passende Werte für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ermitteln. Zeigen Sie, dass sich dieser in der Form $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ schreiben lässt.

6 b) Weisen Sie nach, dass N_2 Wendepunkt von G_f ist, und ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Wendetangente.

[Zur Kontrolle: Tangentengleichung $y = -4x + 8$]

4 c) Die Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

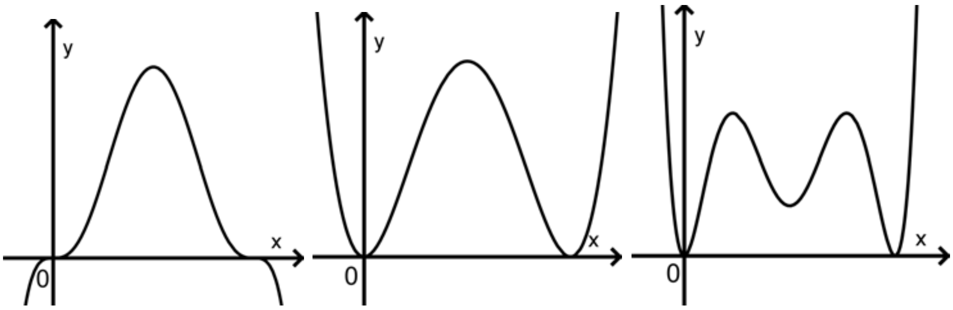
Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

8 d) Berechnen Sie $F(4)$. Was folgt daraus für die beiden Flächenstücke, die der Graph G_f mit der x-Achse im I. und im IV. Quadranten einschließt? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie nun die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

4 e) Einer der drei abgebildeten Graphen I, II oder III stellt den Graphen von F dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht in Betracht kommen.



Graph I Graph II Graph III

3 f) Bekanntlich ist jede Integralfunktion der Funktion f auch Stammfunktion von f. Begründen Sie, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat. Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an, die keine Integralfunktion von f ist.

2. In der Medizin wird radioaktives Jod-123 zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt. Kurze Zeit nach der Verabreichung dieser Substanz an den Patienten wird die von der Substanz ausgehende Strahlung gemessen, wodurch Rückschlüsse auf den Zustand der Schilddrüse möglich sind. Durch radioaktiven Zerfall verringert sich die Substanzmasse.
Die im Körper des Patienten noch vorhandene Masse m des verabreichten Jod-123 lässt sich durch den Term $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ mit $k > 0$ beschreiben. Dabei gibt m_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ verabreichte Jodmasse an; t ist die Maßzahl der seit Verabreichung vergangenen Zeit in Stunden.

4 a) Nach einer Zeit von 13,2 Stunden ist nur noch die Hälfte der verabreichten Jodmasse vorhanden. Bestimmen Sie hieraus den Wert des Parameters k.

[Zur Kontrolle: $k \approx 0{,}0525$]

6 b) Wie viel Prozent der verabreichten Jodmasse sind vier Stunden nach Verabreichung im Körper des Patienten noch vorhanden? Wie lange dauert es, bis 90 % der verabreichten Jodmasse zerfallen sind?

40

BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x \cdot e^{2-x}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

3 1. a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

6 b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunkts von G_f und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an G_f im Punkt $P(0 \mid f(0))$.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = (1-x)e^{2-x}$]

4 c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f. Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f an.

5 d) Berechnen Sie $f(-0{,}5)$ und $f(5)$. Zeichnen Sie die Tangente t und den Graphen G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.
(Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-7 \le y \le 9$)

4 2. a) Ermitteln Sie durch Betrachtung einer jeweils geeigneten Dreiecks- oder Trapezfläche grobe Näherungswerte für $\int_0^1 f(x)dx$ und $\int_1^5 f(x)dx$.

6 b) Betrachtet wird die Integralfunktion $I: x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung der Funktion I Art und Lage des Extrempunkts des Graphen von I. Skizzieren Sie unter Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse, insbesondere auch der Näherungswerte aus Teilaufgabe 2a, den Graphen von I in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1d.

3. Gegeben ist nun zusätzlich die Schar der Geraden g_a mit den Gleichungen $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, und Definitionsbereich $D_a = \mathbb{R}$.

4 a) Jede Gerade g_a hat mit G_f den Ursprung gemeinsam (kein Nachweis erforderlich). Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte des Parameters a es einen zweiten Punkt gibt, den die Gerade g_a mit G_f gemeinsam hat. Geben Sie die x-Koordinate x_S dieses Punktes in Abhängigkeit von a an.

[Zur Kontrolle: $x_S = 2 - \ln a$]

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	b) $F: x \mapsto (-x-1) \cdot e^{2-x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit der Geraden g_a für $a = 1$ einschließt.
3	c) G_f und die x-Achse schließen im I. Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück ein, das den endlichen Flächeninhalt e^2 besitzt (Nachweis nicht erforderlich). Für ein bestimmtes a_0 teilt die Gerade g_{a_0} dieses Flächenstück in zwei inhaltsgleiche Teilstücke. Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung von a_0 an.
40	

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

5 1. Anlässlich einer Studie wurden 2000 Jugendliche im Alter von 18 Jahren zu ihren Ernährungsgewohnheiten befragt. Von den Befragten gaben 740 an, am Morgen nicht zu frühstücken. Von diesen 740 „Nichtfrühstückern“ waren 420 berufstätig. Unter den 1260 „Frühstückern“ waren 800 nicht berufstätig. Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse F: „Die Person frühstückt am Morgen“ und B: „Die Person ist berufstätig“ stochastisch abhängig sind.

Das Unternehmen „Müsli-4-U“ bietet über das Internet individuell zusammenstellbare Müslipackungen an.
Für die Zusammenstellung kann aus 2 Basismischungen sowie aus 9 Frucht-, 4 Nuss- und 3 Getreidezusätzen gewählt werden.

3 2. Wie viele verschiedene Müslipackungen können zusammengestellt werden, wenn jede genau eine Basismischung und genau 4 verschiedene Zusätze enthalten soll?

3. Im Rahmen einer Aktion „Gesundes Frühstück“ konnte „Müsli-4-U“ an einem Gymnasium als Kooperationspartner gewonnen werden. Der Kooperationspartner liefert jeder Klasse täglich eine Gratis-Packung Müsli, das aus genau einer Basismischung und genau 2 Zusätzen zusammengestellt wird. Die beiden Zusätze stammen dabei jeweils aus zwei verschiedenen der Bereiche „Früchte“, „Nüsse“ beziehungsweise „Getreide“.

3 a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass es 150 verschiedene Möglichkeiten gibt, eine solche Gratis-Packung zusammenzustellen.

Im Folgenden wird angenommen, dass jede dieser 150 Möglichkeiten gleich wahrscheinlich ist und die Lieferung der einzelnen Packungen unabhängig voneinander erfolgt.

3 b) Es gibt Schüler, die aufgrund einer Allergie keine Nüsse essen dürfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält.

[Ergebnis: 36 %]

4 c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Klasse 8a an mindestens 4 von 5 Tagen einer Schulwoche die gelieferte Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält.

3 d) Formulieren Sie ein zum Sachzusammenhang der Teilaufgabe 3c passendes Ereignis D, das die Wahrscheinlichkeit

$P(D) = 0{,}36^2 \cdot \binom{3}{2} \cdot 0{,}36^2 \cdot 0{,}64$ besitzt.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	e) Wie viele Gratis-Packungen müssen mindestens zusammengestellt werden, damit mit mehr als 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine Packung ohne Nusszusatz dabei ist?
5	f) Das Unternehmen „Müsli-4-U“ möchte bei seinen Produkten den Geschmack von Jugendlichen stärker berücksichtigen. Es vermutet, dass mindestens 50 % der Jugendlichen ein Müsli ohne Nusszusatz bevorzugen. Um diese Vermutung zu testen, werden 100 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung des Unternehmens mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlicherweise verworfen werden soll?
	4. Den über das Internet bei „Müsli-4-U“ bestellten Müslipackungen wird jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p ein Gutschein beigelegt.
3	a) Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in genau 4 von 6 über das Internet bestellten Packungen jeweils ein Gutschein befindet, kann durch eine Funktion f mit dem Term $f(p) = 15(p^6 - 2p^5 + p^4)$, $p \in [0;1]$, beschrieben werden.
6	b) Bestimmen Sie die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion f aus Teilaufgabe 4a. Interpretieren Sie jede dieser Nullstellen im Anwendungszusammenhang.
40	

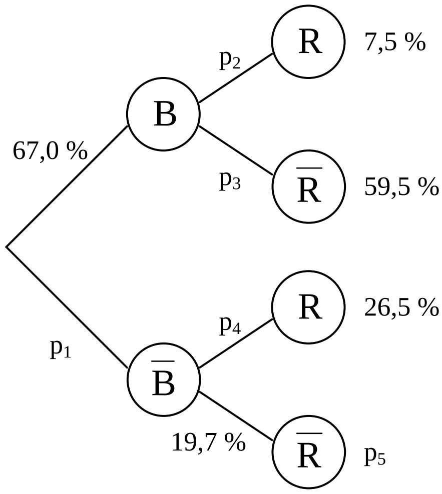
BE

IV.

In den Jahren 2005, 2006 und 2007 wurde jeweils eine repräsentative Umfrage unter 2000 Menschen in Deutschland zum Thema „Rauchverbot in Restaurants“ durchgeführt. Im Jahr 2007 haben dabei 67,0 % ein Rauchverbot befürwortet.

3 1. Die Anzahl der Befürworter des Rauchverbots unter den Befragten ist im Jahr 2007 im Vergleich zum Jahr 2006 um 160 Personen, im Vergleich zum Jahr 2005 um 280 Personen größer. Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Befürworter des Rauchverbots in den Jahren 2005 und 2006.

2. Aus den Befragten des Jahres 2007 wird eine Person zufällig ausgewählt. Dabei werden die Ereignisse B: „Die Person befürwortet ein Rauchverbot in Restaurants“ und R: „Die Person ist Raucher“ betrachtet (vgl. auch nebenstehendes Baumdiagramm).



2 a) Beschreiben Sie das Ereignis in Worten, dessen Wahrscheinlichkeit im obigen Baumdiagramm mit 7,5 % angegeben ist.

5 b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3, p_4 und p_5 aus obigem Baumdiagramm in Prozent auf eine Nachkommastelle genau.

3 c) Begründen Sie mit Hilfe entsprechender Wahrscheinlichkeiten, dass die Ereignisse B und R stochastisch abhängig sind.

2 d) Bei welcher der folgenden Zahlen kann es sich um die Anzahl der Raucher unter den befragten Personen handeln? Begründen Sie Ihre Antwort.

150   530   680   1340

4 e) Wie viel Prozent der Raucher haben das Rauchverbot befürwortet?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

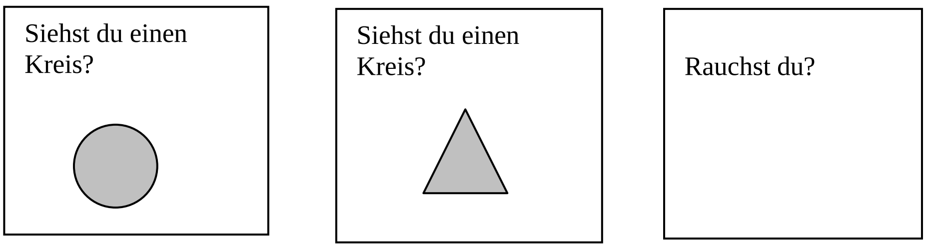
3. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass in der Bevölkerung 67 % das Rauchverbot in Restaurants befürworten.

5 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 12 zufällig ausgewählten Personen höchstens 10 Befürworter befinden?

5 b) Wie viele Personen müssen mindestens zufällig ausgewählt werden, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein Befürworter darunter befindet?

6 4. Es wird angezweifelt, dass der Anteil der Befürworter des Rauchverbots derzeit noch 67 % beträgt. Vielmehr wird vermutet, dass der Prozentsatz gegenwärtig höchstens bei 60 % liegt. Um diese Vermutung zu testen, wird eine Befragung von 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt.
Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irrtümlich abgelehnt werden soll?

5 5. Die SMV eines Gymnasiums möchte den Anteil der Raucherinnen unter den Schülerinnen der Mittelstufe an der eigenen Schule ermitteln. Sie führt deshalb eine Befragung durch. Dabei wird die so genannte Dunkelfeldmethode verwendet, die durch eine Anonymisierung der Daten ehrliche Antworten gewährleisten soll.
Bei dieser Methode zieht die Befragte zufällig eine der drei abgebildeten, verdeckt liegenden Karten und beantwortet die Frage wahrheitsgemäß mit „Ja“ oder „Nein“. Der Interviewer notiert nur diese Antwort, ohne zu wissen, welche Karte jeweils gezogen wurde.



Von 357 auf diese Weise befragten Mädchen haben 138 mit „Ja“ geantwortet. Bestimmen Sie den Schätzwert für den Anteil der Raucherinnen unter den Schülerinnen, der sich aus diesen Angaben herleiten lässt.

40

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

1. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A(-3|4|0)$ und $C(-2|1|2)$ gegeben.

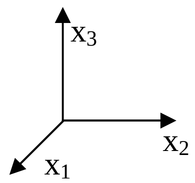
4 a) Die Punkte O, A und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[Zur Kontrolle: $E: 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0$]

3 b) Z sei der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Durch Spiegelung des Ursprungs O an Z entsteht der Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B.

[Ergebnis: $B(-5|5|2)$]

6 c) Berechnen Sie den Innenwinkel φ des Vierecks OABC bei O und begründen Sie, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist. Zeichnen Sie das Parallelogramm in ein Koordinatensystem ein (vgl. Skizze; Platzbedarf im Hinblick auf das Folgende: $-1 \le x_3 \le 11$).



7 d) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden $g = OA$ auf. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat g? Das Lot vom Punkt C auf die Gerade g schneidet g im Punkt F. Berechnen Sie die Koordinaten von F. Zeichnen Sie das Lot in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1c ein.

[Teilergebnis: $F(-1{,}2|1{,}6|0)$]

4 e) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms OABC $5\sqrt{5}$ beträgt.

2. Das Parallelogramm OABC aus Aufgabe 1 sei nun die Grundfläche einer vierseitigen Pyramide, deren Spitze S auf der positiven x_3-Achse liegt.

8 a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S so, dass die Pyramide OABCS den Rauminhalt $\frac{50}{3}$ besitzt. Zeichnen Sie die Pyramide in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1c ein.

4 b) Die Pyramide rotiert nun um ihre Kante OS. Der Eckpunkt B bewegt sich dabei auf einem Kreis. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M dieses Kreises an und berechnen Sie seinen Radius r.

4 c) Begründen Sie, dass der Punkt C im Inneren des in Teilaufgabe 2b beschriebenen Rotationskörpers liegt.

40

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2\,|\,0\,|\,1)$, $B(2\,|\,-2\,|\,0{,}5)$ und $C(0\,|\,-4\,|\,1)$ sowie die Ebene $F: x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$ gegeben.

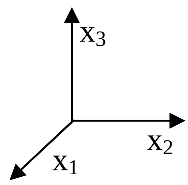
6 1. a) A, B und C legen die Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform sowie in Normalenform.

[mögliches Teilergebnis: $E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 8 = 0$]

6 b) Bestätigen Sie, dass die Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ die Schnittgerade der Ebenen E und F ist, und begründen Sie, dass s in der x_1x_3-Koordinatenebene liegt.

4 c) Zeigen Sie, dass die Punkte $R(4\,|\,0\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,2)$ auf der Geraden s liegen und dass die Punkte $T(0\,|\,-8\,|\,0)$ beziehungsweise $U(0\,|\,4\,|\,0)$ die Schnittpunkte der Ebene E beziehungsweise der Ebene F mit der x_2-Achse sind.

4 d) Zeichnen Sie die Punkte R, S, T und U sowie die Gerade s in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein und veranschaulichen Sie die Lage der Ebenen E und F durch Einzeichnen ihrer Spurgeraden.



2. In einem Geländemodell liegen die Hänge eines Bergrückens in den Ebenen E und F. Der Grat dieses Bergrückens wird von einem Teil der Geraden s gebildet. Die x_1-Achse zeigt in Südrichtung, die x_2-Achse in Ostrichtung. Vom Punkt B aus wird horizontal ein Tunnel in Ostrichtung durch den Berg bis zur Ebene F gebohrt.

7 a) Berechnen Sie die Länge des Tunnels im Geländemodell.

6 b) Vom Punkt $P(2\,|\,p_2\,|\,p_3)$ der Geraden TR soll in der Ebene E eine geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B angelegt werden. Berechnen Sie die Koordinaten von P und begründen Sie, dass diese Zufahrt zum Tunneleingang B bergauf und genau von Westen nach Osten verläuft.

7 c) Berechnen Sie für diese Zufahrtsstraße von P nach B den Neigungswinkel α gegen die Horizontale. Beschreiben Sie mit kurzer Begründung, in welchem Punkt L der Strecke [TR] die steilstmögliche geradlinige Zufahrtsstraße zum Tunneleingang B beginnen würde.

(Hinweis: Die Koordinaten von L müssen nicht berechnet werden.)

40