Abiturprüfung 2010

MATHEMATIK

als Leistungskursfach

Arbeitszeit: 240 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
LM1, LM2 und LM3 zur Bearbeitung aus.

LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto x - \ln\frac{x}{k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

3 a) Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to 0$ und für $x \to \infty$.

8 b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_k sowie das Krümmungsverhalten von G_k. Berechnen Sie $f_1(6)$ und skizzieren Sie G_1 in ein geeignetes Koordinatensystem.

[zur Kontrolle: Tiefpunkt bei $x = 1$]

6 c) Zeigen Sie, dass G_k aus G_1 durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse hervorgeht.
Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k. (Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Nullstellen zu berechnen.)

4 d) Begründen Sie, dass f_k im Intervall $]0;1]$ umkehrbar ist, und geben Sie Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion f_k^{-1} an. Geben Sie die Stelle an, an der f_k^{-1} nicht differenzierbar ist.

7 e) Betrachtet wird folgende Aussage:

$$\int_0^1 f_k(x)dx = 1{,}5 + \ln k$$

α) Weisen Sie nach, dass die Aussage wahr ist.

β) Interpretieren Sie die Aussage für $k = 1$ geometrisch.

γ) Geben Sie ein Integral über f_1^{-1} an, dessen Wert Sie mit Hilfe der Aussage ermitteln können, und bestimmen Sie diesen Wert.

3 f) In dieser Teilaufgabe werden diejenigen Funktionen f_k betrachtet, deren Graphen G_k die x-Achse jeweils in genau zwei Punkten schneiden. Durch G_k, die beiden Koordinatenachsen sowie die Gerade $x = 1$ werden dann jeweils im Bereich $x \leq 1$ zwei Flächenstücke endlichen Inhalts festgelegt, von denen das eine oberhalb, das andere unterhalb der
x-Achse liegt. Bestimmen Sie k so, dass diese beiden Flächenstücke inhaltsgleich sind.

(Fortsetzung nächste Seite)

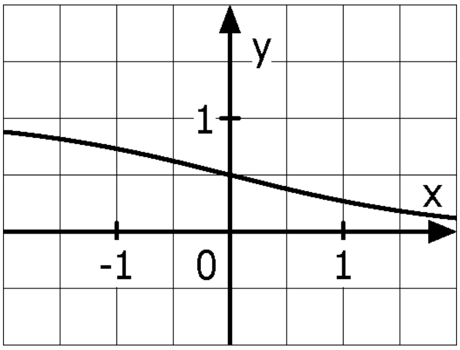
BE

2. Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte, zweimal differenzierbare Funktion g mit der Eigenschaft

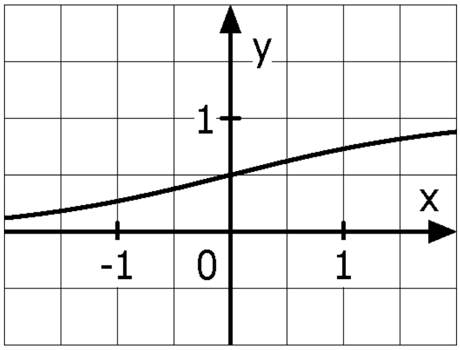
$$g'(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

3 a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g''(x) = g(x) \cdot [1 - g(x)] \cdot [1 - 2 \cdot g(x)]$

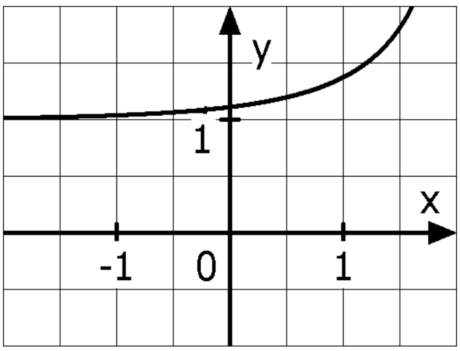
6 b) Einer der vier im Folgenden abgebildeten Graphen stellt den Graphen von g dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die anderen nicht in Betracht kommen.



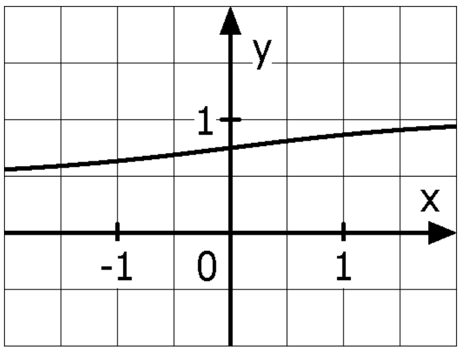
Graph I



Graph II



Graph III



Graph IV

40

BE

II.

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k : x \mapsto \dfrac{x^2 - k}{x^2 - 1}$ mit $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

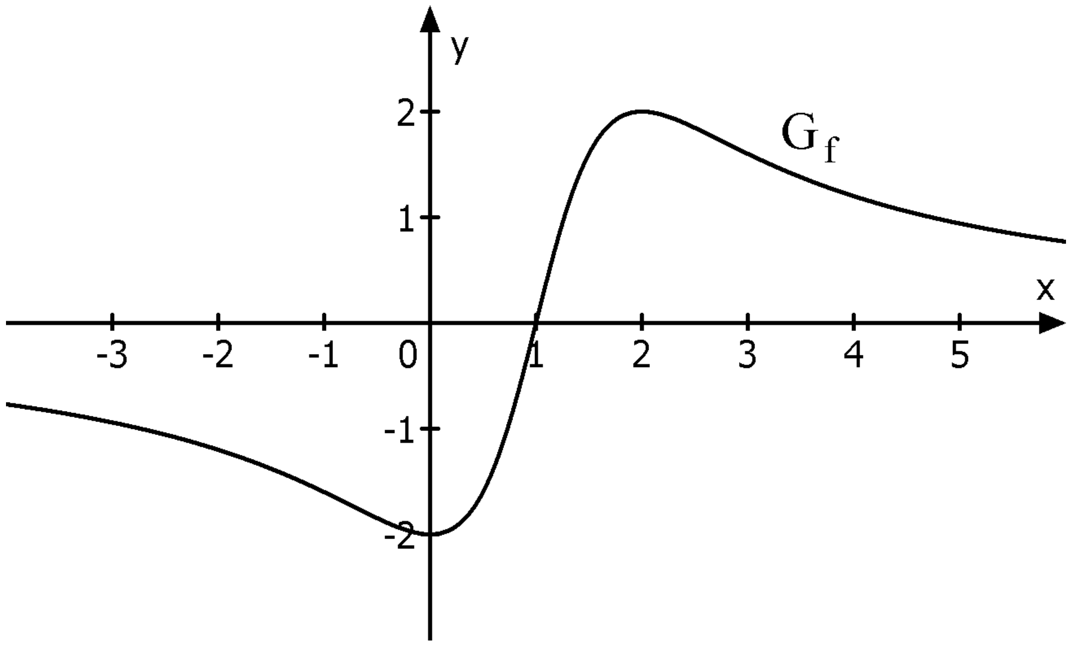
6 a) Untersuchen Sie G_k auf Symmetrie, bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

6 b) Zeigen Sie, dass G_k genau einen Extrempunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Lage und Art in Abhängigkeit von k.

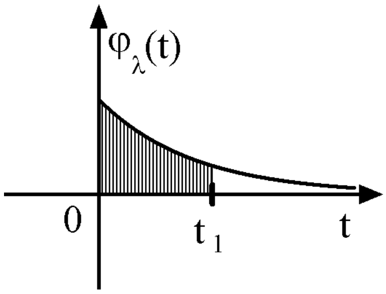
6 c) Wählen Sie zwei Scharparameter k_1 und k_2 so, dass sich die zugehörigen Graphen in der Art ihres Extrempunkts unterscheiden. Skizzieren Sie G_{k_1} und G_{k_2} unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignetes Koordinatensystem.

2. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f. G_f ist punktsymmetrisch zum einzigen Schnittpunkt $S(1|0)$ mit der x-Achse. Die Extrempunkte von G_f sind $(0|-2)$ und $(2|2)$.

   Die Funktion $F : x \mapsto \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Integralfunktion von f.



(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
5	a) Geben Sie Monotonie- und Krümmungsverhalten des Graphen von F an.
4	b) Begründen Sie, dass F genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an.
5	c) Begründen Sie, dass für $h > 0$ gilt: $F(1-h) = F(1+h)$. Welche Bedeutung hat diese Beziehung für den Graphen der Integralfunktion F?
	3. Für die Abschätzung des Risikos von Meteoriteneinschlägen auf der Erde spielt die folgende Funktionenschar eine zentrale Rolle: $\varphi_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0,\ \lambda > 0$ t gibt die Wartezeit bis zum ersten Einschlag in Jahren an. λ ist ein von der Meteoritengröße abhängiger Parameter. Für einen Zeitpunkt $t_1 > 0$ entspricht der Inhalt der schraffierten Fläche (vgl. Skizze) der Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt t_1 der erste Meteoriteneinschlag erfolgt ist. 
3	a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bis zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{\lambda}$ der erste Einschlag erfolgt ist.
5	b) Berechnen Sie die mittlere Wartezeit $\overline{T}$ (in Jahren) bis zum ersten Einschlag, die durch $\overline{T} = \int_0^\infty t \cdot \varphi_\lambda(t)\,dt$ gegeben ist.
40	

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

1. In einer Einbahnstraße mit drei zunächst leeren Fahrspuren schaltet die Ampel auf Rot. Bis zur nächsten Grünphase kommen nacheinander 13 Autos an dieser Ampel zum Stehen.

3 a) Auf wie viele verschiedene Möglichkeiten können sich die 13 nacheinander eintreffenden Autos auf die drei Fahrspuren aufteilen, wenn die Autos unterschieden werden?

4 b) Wie viele solche Aufteilungen gibt es, wenn jeder Fahrer eine Fahrspur ansteuert, an der möglichst wenige Autos stehen?

2. An einer Ampel stehen Autos hintereinander. Die Ampel schaltet auf Grün. In einem einfachen Modell geht man davon aus, dass ein Auto erst nach einer gewissen zeitlichen Verzögerung gegenüber dem Auto anfährt, das in der Schlange vor ihm steht. Für die möglichen zeitlichen Verzögerungen sind in diesem Modell vier verschiedene Werte vorgesehen. Die folgende Tabelle gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie jeweils eintreten.

Verzögerung in Sekunden	0,5	1,0	1,5	2,0
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,5	0,2	0,1

Diese Tabelle gibt auch die im Modell möglichen zeitlichen Verzögerungen zwischen dem Umschalten der Ampel auf Grün und dem Anfahren des ersten Autos sowie deren Wahrscheinlichkeiten an.

5 a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das vierte Auto in der Schlange 7,0 s nach Beginn der Grünphase anfährt.

3 b) Fassen Sie die Verzögerungen in Sekunden als Werte einer Zufallsgröße V auf. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von V.

4 c) Die Zufallsgröße Z beschreibt die Zeit in Sekunden, die vom Umschalten der Ampel auf Grün bis zum Anfahren des fünften Autos in der Schlange vergeht. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von Z. Hierbei sollen die beim Anfahren der fünf Autos auftretenden zeitlichen Verzögerungen als unabhängig voneinander angenommen werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Durch eine Befragung soll der Anteil p der Pkw-Halter abgeschätzt werden, die bereit wären, ein Elektroauto zu kaufen, wenn dies vom Staat mit 2500 € bezuschusst wird. Dazu werden 1000 zufällig ausgewählte Pkw-Halter befragt. Wer mit „Ja“ antwortet, wird als Elektroautokäufer (kurz: EAK) bezeichnet.

4 a) Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass die relative Häufigkeit der EAK unter den 1000 Befragten um weniger als 5 Prozentpunkte von p abweicht.

2 b) Die Umfrage liefert 220 EAK. Welche Aussage über p kann auf Grund der Abschätzung aus Teilaufgabe 3a gemacht werden?

6 c) Der Finanzminister vertritt die Hypothese, dass der Anteil p höchstens 20 % beträgt. Kann seine Hypothese bei einem Umfrageergebnis von 220 EAK auf einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt werden? Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

4. An zwei verschiedenen Stellen A und B in einer Stadt wurden Geschwindigkeitskontrollen durchgeführt. Dabei wurden an der Stelle A dreimal so viele Autos kontrolliert wie an der Stelle B. Die folgenden Tabellen geben Auskunft über die dabei gemachten Beobachtungen (GÜ steht für Geschwindigkeitsübertretung, männlich bzw. weiblich für das Geschlecht des jeweiligen Fahrzeuglenkers):

Stelle A	GÜ	keine GÜ
männlich	4 %	16 %
weiblich	20 %	60 %

Stelle B	GÜ	keine GÜ
männlich	40 %	20 %
weiblich	32 %	8 %

4 a) Zeigen Sie, dass sowohl an der Stelle A als auch an der Stelle B der Anteil derjenigen, die die Geschwindigkeit übertreten haben, unter den Frauen größer ist als unter den Männern.

5 b) Die örtliche Tageszeitung berichtet: „Die Ergebnisse der beiden Geschwindigkeitskontrollen belegen, dass Frauen häufiger zu schnell fahren als Männer.“ Untersuchen Sie, ob der Anteil derjenigen, die die Geschwindigkeit übertreten haben, unter allen kontrollierten Frauen tatsächlich größer ist als unter allen kontrollierten Männern.

40

BE	

IV.

1. Eine große Kiste enthält gut gemischt mehrere hundert rote, blaue, grüne und gelbe Bausteine, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden. Jeder fünfte Baustein ist gelb, 8 % sind grün. Außerdem befinden sich dreimal so viele blaue wie grüne Steine in der Kiste.

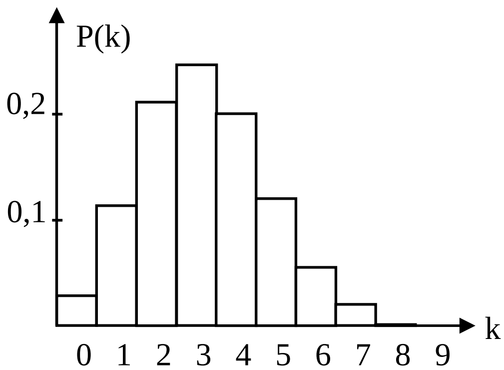
5 a) Aus der Kiste werden 10 Bausteine zufällig entnommen. Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis „Keiner der Bausteine ist grün“ bei den Modellen „Ziehen mit Zurücklegen“ und „Ziehen ohne Zurücklegen“ um weniger als 0,2 Prozentpunkte unterscheiden, wenn von einer Kiste mit 1000 Steinen ausgegangen wird.

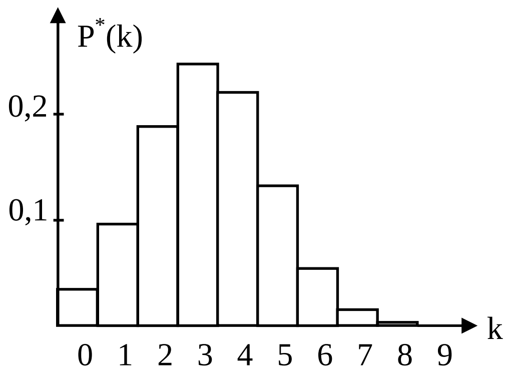
Im Folgenden soll jeweils das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ verwendet werden.

4 b) Wie viele Bausteine müssen mindestens aus der Kiste zufällig entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75 % wenigstens ein grüner Baustein darunter ist?

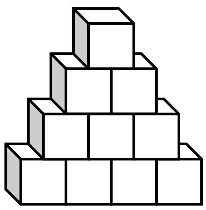
5 c) Lars denkt sich ein Spiel aus. Ein Spieler soll dazu 16 Bausteine aus der Kiste zufällig entnehmen; für jeden gelben und für jeden blauen Stein zahlt Lars 1 €, für jeden grünen 5 € an den Spieler. Für jeden roten Baustein muss der Spieler jedoch einen bestimmten Betrag an ihn zahlen. Wie hoch muss Lars diesen Betrag mindestens festsetzen, damit er bei häufigem Spielen im Mittel keinen Verlust zu befürchten hat?

Es werden zufällig 16 Bausteine aus der Kiste entnommen. Die beiden Säulendiagramme zeigen die Wahrscheinlichkeiten, dabei k gelbe Steine zu erhalten. Das linke Diagramm zeigt die zugehörige Binomialverteilung, das rechte ergibt sich bei Näherung durch die Normalverteilung.





(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
7	d) Prüfen Sie, ob das Kriterium für eine brauchbare Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung erfüllt ist (vgl. Formelsammlung). Zeigen Sie rechnerisch, dass es einen Wert für k gibt, bei dem die in den Diagrammen dargestellten Wahrscheinlichkeiten $P(k)$ und $P^*(k)$ um mehr als 2 Prozentpunkte voneinander abweichen.
3	e) In die Kiste werden weitere gelbe Bausteine gegeben. Um wie viel Prozent muss dabei die Anzahl der gelben Bausteine erhöht werden, damit anschließend jeder dritte Baustein in der Kiste gelb ist?
	2. Es gibt zwei Typen A und B von Jumbo-Verkaufspackungen, die jeweils gut gemischt Tausende von Bausteinen enthalten; diese unterscheiden sich nur in ihrer Farbe. Bei Typ A ist jeder fünfte, bei Typ B jeder dritte Baustein gelb. Bei einer gelieferten Jumbo-Verkaufspackung ist der Aufkleber mit der Typenbezeichnung verloren gegangen. Durch zufällige Entnahme von 25 Bausteinen soll entschieden werden, um welchen Typ es sich handelt. Verwenden Sie im Folgenden das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“.
5	a) Geben Sie die Entscheidungsregel an, bei der die beiden Wahrscheinlichkeiten, sich irrtümlich für einen falschen Typ zu entscheiden, möglichst nahe beieinander liegen. Wie groß sind in diesem Fall die beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten?
3	b) Wie muss die Entscheidungsregel aus Teilaufgabe 2a bei gleichbleibendem Stichprobenumfang geändert werden, wenn man die Wahrscheinlichkeit, sich irrtümlich für Typ A zu entscheiden, verringern will? Nennen Sie eine Konsequenz, die diese Änderung hinsichtlich einer Entscheidung für Typ B hat.
	3. Lars’ kleine Schwester spielt mit 3 roten, 4 blauen und 3 gelben würfelförmigen Bausteinen, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden.
4	a) Sie baut einen Turm, indem sie alle Steine aufeinandersetzt. Wie viele verschiedene Farbmuster sind bei diesem Turm möglich, wenn weder der oberste noch der unterste Stein rot sein sollen?
4	b) Nun baut sie aus den 10 Steinen eine „Treppe“ (siehe Abbildung). Wie viele verschiedene Farbmuster sind für die aus 10 Quadraten bestehende Stirnseite der „Treppe“ möglich, wenn in jeder waagrechten Reihe ein blauer Stein sitzen soll? 
40	

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

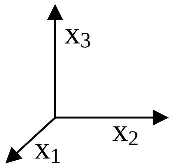
Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ der Punkt $A(2|-1|-2)$ und die Menge der Punkte $B_k(2|5|k)$ mit $k \in \mathbb{R}$.

1. Die Punkte A, B_{-2} und B_6 bilden ein Dreieck, das in einer Ebene E liegt. (Nachweis nicht erforderlich)

6 a) Zeigen Sie, dass das Dreieck bei B_{-2} einen rechten Winkel hat, und geben Sie eine Gleichung von E in Normalenform an. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat E?

[mögliches Ergebnis: $E: x_1 - 2 = 0$]

2 b) Zeichnen Sie das Dreieck in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein.



5 c) Weisen Sie nach, dass die Gerade AB_1 den Innenwinkel des Dreiecks bei A halbiert.

6 d) Berechnen Sie die Koordinaten des Inkreismittelpunkts M des Dreiecks $AB_{-2}B_6$ und tragen Sie M in die Zeichnung ein. Geben Sie den Radius r des Inkreises an. [zur Kontrolle: $M(2|3|0)$]

Im Folgenden bezeichnet a die Parallele zur x_1-Achse durch den Punkt A und b die Gerade, auf der die Punkte B_k liegen.

4 2. a) Zeigen Sie, dass die Geraden a und b windschief sind.

4 b) F_k bezeichnet die von der Geraden a und dem Punkt B_k bestimmte Ebene. Ermitteln Sie für F_k eine Gleichung in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $F_k: (2+k)x_2 - 6x_3 + k - 10 = 0$]

4 c) Das in Teilaufgabe 2b angegebene Ergebnis lässt sich als Ebenenschar deuten. Zeigen Sie, dass die Ebene $G: x_2 + 1 = 0$ die Gerade a enthält, aber nicht der Ebenenschar F_k angehört. In welcher Lagebeziehung stehen die Ebene G und die Gerade b zueinander?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Das Dreieck $AB_{-2}B_6$ aus Aufgabe 1 bildet die Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze der Punkt $S(s_1 \,|\, s_2 \,|\, s_3)$ ist.

5 a) Ermitteln Sie alle für die Koordinaten s_1, s_2 und s_3 möglichen Werte, wenn die Pyramide das Volumen 48 hat.

4 b) Auf den in Teilaufgabe 1d betrachteten Kreis wird nun eine Halbkugel – ebenfalls mit M als Mittelpunkt und r als Radius – gesetzt. Kann S so gewählt werden, dass diese Halbkugel ganz im Inneren der Pyramide liegt? Machen Sie Ihre Antwort plausibel.

40

BE	VI.
	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(0\|0\|2)$, $C(1\|4\|1)$, $D(-1\|2\|0)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.
4	1. a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte A, C und D eine Ebene E festlegen, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform. [mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$]
6	b) Die Gerade g schneidet die Ebene E in einem Punkt B. Berechnen Sie die Koordinaten von B und zeigen Sie, dass der Punkt B das Dreieck ACD zu einem Quadrat ABCD ergänzt. [Teilergebnis: $B(2\|2\|3)$]
	2. Zusätzlich ist die Geradenschar $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t \end{pmatrix}$ mit $\mu, t \in \mathbb{R}$ gegeben.
3	a) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Schar der Geraden h_t enthalten ist.
5	b) Eine der Schargeraden h_t ist parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie den zugehörigen Scharparameter t und den Abstand dieser Geraden von E.
6	3. a) Bestimmen Sie die Koordinaten des von B verschiedenen Punktes $P \in g$ so, dass die Geraden PA und PC senkrecht zueinander stehen.
6	b) Begründen Sie, dass es eine Kugel K mit Mittelpunkt $M \in E$ gibt, auf der die Punkte A, B, C, D und P liegen. Ermitteln Sie die Koordinaten von M und den Radius r von K. [zur Kontrolle: $M(0{,}5\|2\|1{,}5)$; $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$]
4	c) Prüfen Sie, ob der Ursprung O des Koordinatensystems innerhalb oder außerhalb der Kugel K liegt, und geben Sie die Radien der Kugeln um den Ursprung an, die die Kugel K berühren.
6	4. Für einen Punkt $Q \in g$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks AQC minimal. Bestimmen Sie diesen minimalen Flächeninhalt.
40	