17786

Fachabiturprüfung 2008 zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

# MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Donnerstag, 12. Juni 2008, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

*Aufgabengruppe A*

*A I*

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion
$f_k : x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{k}{2}x^2 + 2x - 2k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $D_{f_k} = \mathbb{R}$.
Der Graph wird mit $G_{f_k}$ bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph $G_{f_k}$ für jedes k zwei relative Extremstellen besitzt. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen $G_{f_k}$.
Bestätigen oder widerlegen Sie anhand Ihres Ergebnisses die Aussage: "Für $k > 0$ gilt: Je größer der Wert von k, desto steiler die Tangente." (Ausführliche Rechnung nicht erforderlich!) (6 BE)

1.3 Weisen Sie nach, dass die Tangente an $G_{f_k}$ im Schnittpunkt mit der y-Achse eine von k unabhängige Steigung hat. (2 BE)

1.4 Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ einen relativen Hochpunkt besitzt. (3 BE)

2.0 Nun wird $k = 2$ gesetzt. Man erhält also die Funktion $f_2$.

2.1 Zeigen Sie, dass der Funktionsterm von $f_2$ sich auch in der Form $f_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 4\right)(x-2)$ schreiben lässt und bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion und deren Vielfachheiten. (4 BE)

2.2 Berechnen Sie die maximalen Monotonieintervalle. Geben Sie mit deren Hilfe Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte an. (7 BE)

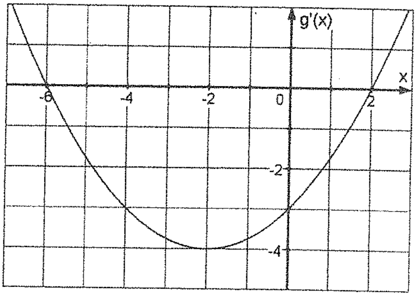
2.3 Zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von $f_2$ im Bereich $-2{,}5 \le x \le 3$.
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm. (4 BE)

2.4 Der Graph der Funktion $f_2$ schließt mit den beiden Koordinatenachsen eine vollständig im III. Quadranten liegende Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt. (5 BE)

*Fortsetzung s. nächste Seite*

*Fortsetzung A I*

3.0 Die untere Abbildung zeigt den Graphen der **1. Ableitungsfunktion** $g'$ der Funktion $g: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ mit $D_g = \mathbb{R}$.




3.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm $g(x)$ der Funktion g. (7 BE)

3.2 Der Graph von g besitzt offensichtlich die Nullstelle $x = 0$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es für $x > 0$ eine weitere Nullstelle von g geben muss. (4 BE)

3.3 Begründen Sie ohne Rechnung mit Hilfe der obigen Zeichnung, an welcher Stelle der Graph von g eine Wendestelle hat. (3 BE)

4.0 Aus einem Stück Draht der Länge 72 [cm] sollen die Kanten eines Quaders geformt werden, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a bzw. 2a ist.

4.1 Berechnen Sie zunächst das Volumen $V(a)$ des Quaders in Abhängigkeit von der Länge a. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge an. [Teilergebnis: $V(a) = 36a^2 - 6a^3$ ] (6 BE)

4.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von a, für den das Volumen V des Quaders sein absolutes Maximum annimmt. Berechnen Sie auch das maximale Volumen. (5 BE)

*Aufgabengruppe A*

*A II*

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion

$f_k : x \mapsto -\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k > 0$ und $D_{f_k} = \mathbb{R}$.

Der Graph wird mit $G_{f_k}$ bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion $f_k$. Untersuchen Sie den Graphen $G_{f_k}$ auf Symmetrie. (5 BE)

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes des Graphen $G_{f_k}$. Begründen Sie dann, dass dieser Extrempunkt für jeden Wert von k auf der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{3}{4}x^2$ liegt.

[Teilergebnis: $x_E = \frac{6}{k}$] (8 BE)

2.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion $h : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ mit $D_h = \mathbb{R}$.

Der Graph dieser Funktion wird $G_h$ genannt.

2.1 Begründen Sie kurz, dass $h(x) = f_2(x)$ gilt und berechnen Sie dann für $k \neq 2$ die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen $G_{f_k}$ und $G_h$. (7 BE)

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von $G_h$. Begründen Sie auch, ob einer dieser Wendepunkte ein Terrassenpunkt ist. (6 BE)

2.3 Geben Sie die Nullstellen sowie die Koordinaten des Extrempunktes von $G_h$ an und zeichnen Sie mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen $G_h$ im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 4{,}2$ auf ein gesondertes DIN-A4-Blatt. (Koordinatenursprung auf der Seitenmitte, Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm) (6 BE)

2.4 Der Graph $G_h$, die y-Achse und die Tangente im Hochpunkt des Graphen schließen eine im I. Quadranten liegende Fläche ein. Kennzeichnen Sie diese Fläche im Koordinatensystem von Aufgabe 2.3 und berechnen Sie ihren Inhalt. (6 BE)

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

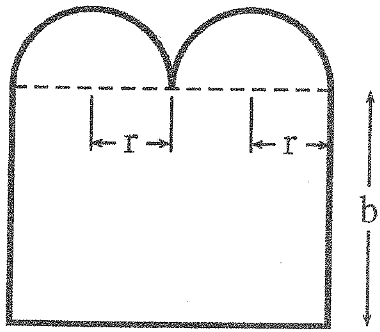
*Fortsetzung A II*

3 Gegeben ist nun die reelle Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 8x + \dfrac{19}{4} & \text{für } x < -1 \\ h(x) & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

Begründen Sie rechnerisch, dass die Funktion g an der Stelle $x_0 = -1$ stetig und differenzierbar ist, und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion im Bereich $-4 \leq x \leq 4{,}2$ mit Farbe in das vorhandene Koordinatensystem ein. (9 BE)

4.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius r) begrenzt.
Der Umfang des Fensters beträgt 10 m.
(Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet!)




4.1 Stellen Sie den Flächeninhalt A(r) des Fensters in Abhängigkeit vom Radius r der Halbkreise dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge $D_A$ an. (7 BE)
[Teilergebnis: $A(r) = 20r - (3\pi + 8) \cdot r^2$]

Berechnen Sie auf 3 Nachkommastellen genau denjenigen Wert von r, für den der Flächeninhalt des Fensters seinen größten Wert annimmt. Wie viel Prozent des Inhalts nimmt in diesem Fall der rechteckige Teil des Fensters ein? (6 BE)

*Aufgabengruppe S*

*S I*

Allgemeine Vorbemerkung: Interpretieren Sie bei den folgenden Aufgaben alle relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

1.0 In einer Jugendherberge werden als Getränke nur Saft (s), Wasser (w) und Cola (c) verkauft. Diese kann man am Automaten (a) oder beim Herbergsvater Max (m) kaufen. Bei ihm gibt es die Getränke gekühlt (k) oder ungekühlt ($\overline{k}$), am Automaten nur gekühlt. 60% der Getränke werden am Automaten gekauft. Der Anteil an Wasser beträgt am Automaten und bei Max jeweils 10%. Cola wird am Automaten zu 60% und bei Max zu 40% gewählt. Wasser geht bei Max nur ungekühlt über die Theke, wobei bei den übrigen Getränken der Anteil der ungekühlten Flaschen jeweils 70% beträgt.
Das Zufallsexperiment besteht darin, bei einem beliebig ausgewählten Getränkekauf festzustellen, wo das Getränk gekauft wird, welches Getränk gekauft wird, und ob es gekühlt oder ungekühlt ist.

1.1 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller 8 Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments. (6 BE)

1.2 Geben Sie zum Zufallsexperiment aus Teilaufgabe 1.0 zwei verschiedene Ergebnisräume an, die sich vom feinsten Ergebnisraum unterscheiden. (2 BE)

Für die folgenden Teilaufgaben liegt der feinste Ergebnisraum zugrunde.

1.3 Geben Sie das Ereignis
$E_1$: „Es wird Saft oder ein ungekühltes Getränk gekauft"
in der aufzählenden Mengenschreibweise an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$. (2 BE)

1.4 Folgende Ereignisse sind vorgegeben:
A: „Ein Getränk wird am Automaten gekauft."
S: „Es wird eine Flasche Saft gekauft."
K: „Das gekaufte Getränk ist gekühlt."
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(S \cap K)$ sowie $P(\overline{A} \cup K)$. (4 BE)

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

*Fortsetzung S I*

2 Es sind 50 Personen in der Jugendherberge untergebracht. Zum Frühstück gibt es Tee (T) und Orangensaft (O). 40 Personen trinken Tee, 25 Orangensaft und 5 Personen trinken nichts zum Frühstück.
Untersuchen Sie z.B. mit Hilfe einer Vierfeldertafel, ob die Wahl von Orangensaft und Tee stochastisch unabhängig ist. (5 BE)

3.0 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tassen Tee an, die ein Gast bei einem Frühstück trinkt. Es ergibt sich folgende Verteilung:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 oder mehr |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Gästezahl | 10 | 15 | 5 | 12 | 6 | 2 | 0 |

3.1 Erstellen Sie für die Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeitsverteilung und stellen Sie diese geeignet graphisch dar.
Berechnen Sie, mit wie viel Tassen Tee der Herbergsvater im Durchschnitt pro Gast rechnen kann. (4 BE)

3.2 Berechnen Sie wie viele Tassen Tee Max pro Gast mindestens bereitstellen muss, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Tee ausreicht, mehr als 90% betragen soll. (3 BE)

4.0 Zum Mittagessen wählen erfahrungsgemäß 3% der Gäste ein vegetarisches Gericht.

4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
$E_2$: „Von 50 Gästen wählen mehr als 3 das vegetarische Gericht."
$E_3$: „Die Zahl der vegetarischen Essen bei 100 Gästen liegt innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert."
$E_4$: „Von 100 Gästen essen 99 nicht das vegetarische Gericht. (8 BE)

4.2 Aus aktuellen Beobachtungen schließt der Herbergsvater, dass der Anteil der vegetarischen Gerichte zugenommen hat (Gegenhypothese). Um seinen Eindruck zu untermauern, führt er einen Test an 200 zufällig ausgewählten Essensbestellungen durch.
Geben Sie für diesen Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie auf dem 5%-Niveau den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Ermitteln Sie für diesen Fall auch die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art. (6 BE)

*Aufgabengruppe S*

*S II*

Ein Spezialitätengeschäft bietet 3 Sorten Kaviar an: A, B und C. Der Kaviar wird jeweils in den Farben Schwarz (s) und Hellbraun (h) angeboten und zwar in kleinen (k) oder großen (g) Blechdosen.

Da ein Großteil der Kunden jeweils nur eine Dose Kaviar kauft, werden im Folgenden nur diese Kunden betrachtet. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 20% dieser Kunden für B-Kaviar, die anderen wählen zu gleichen Teilen die Sorten A und C. Der Verkaufsanteil an schwarzem Kaviar ist bei den Sorten A und B dreimal so hoch wie an hellbraunem, bei der Sorte C ist es jedoch umgekehrt. Sorte A wird zu 70% als große Dose gekauft, Sorte B zu 50% und Sorte C zu 80% und zwar unabhängig von der Farbe.

Die Entscheidung eines zufällig ausgewählten Käufers für eine bestimmte Dose Kaviar wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Interpretieren Sie bei den folgenden Aufgaben alle relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

1 Berechnen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller zwölf Elementarereignisse. (8 BE)
[Teilergebnis: $P(\{Asg\}) = 0{,}21$ ]

2 Gegeben sind die Ereignisse
$E_1$: „Der Kunde kauft hellbraunen Kaviar in einer kleinen Dose."
$E_2$: „Der Kunde kauft schwarzen Kaviar, aber nicht die Sorte A."
Stellen Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise dar und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten. Untersuchen Sie anschließend beide Ereignisse auf Unvereinbarkeit. (6 BE)

3.0 Von 200 Kaviar-Käufern kauften in der Woche vor Ostern 130 A-Kaviar. 90 dieser 200 Personen klagten nach dem Verzehr über Unwohlsein (U), darunter 10, die keinen A-Kaviar gegessen hatten.

3.1 Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt mit Hilfe einer Vierfeldertafel dar. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Ereignisse K: „Die Person isst A-Kaviar" und U: „Es tritt Unwohlsein auf" stochastisch unabhängig sind. Geben Sie eine mögliche Interpretation Ihres Ergebnisses im Sinne der vorliegenden Thematik. (6 BE)

*Fortsetzung siehe nächste Seite*

*Fortsetzung S II*

3.2 Geben Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel ein Zahlenbeispiel Ihrer Wahl an, in dem die beiden Ereignisse K und U stochastisch unabhängig sind und begründen Sie kurz diese Unabhängigkeit. (3 BE)

4.0 Es werden nun 12 zufällig ausgewählte Kaviarkäufer betrachtet. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Kunden an, die sich für B-Kaviar entscheiden. (Zur Erinnerung: $P(\{B\})=0,2$ )

Gegeben sind die Ereignisse
$E_3$: „Genau 3 Kunden entscheiden sich für B-Kaviar."
$E_4$: „Nur der 4., der 6. und der 11. Kunde kaufen B-Kaviar."
Berechnen Sie $P(E_3)$ sowie (exakt!) den Faktor a, für den gilt:
$P(E_3) = a \cdot P(E_4)$. (3 BE)

4.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
$E_5$: „Genau 3 aufeinanderfolgende Kunden kaufen B-Kaviar." (2 BE)

4.3 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (4 BE)

5.0 An einem bestimmten Tag stellt der Abteilungsleiter fest, dass von insgesamt 65 Kaviarkäufern sich 18 für die Sorte B entschieden haben. Er vermutet nun, dass sich der Anteil der B-Käufer erhöht hat.

5.1 Begründen Sie kurz, worauf sich diese Vermutung stützen könnte. (2 BE)

Die Geschäftsleitung lässt daraufhin einen Signifikanztest mit 200 zufällig ausgewählten Kunden durchführen. Auf dem 5%-Niveau soll ermittelt werden, ob der Anteil der B-Kunden wirklich gestiegen sein könnte (Gegenhypothese). Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese $H_0$ an und ermitteln Sie deren maximalen Ablehnungsbereich.
Bewerten Sie anschließend folgende Aussage: „Wenn von den 200 Kunden mindestens jeder vierte B-Kaviar kauft, kann man auf dem 5%-Niveau mit einer Zunahme dieses Käuferanteils schließen." (6 BE)