7186

Fachabiturprüfung 2008 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Donnerstag, 12. Juni 2008, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE

1.0 Für die Maßzahl p(h) des barometrischen Luftdrucks mit der Einheit Hektopascal gilt in Abhängigkeit von der Maßzahl h der Höhe über der Erdoberfläche mit der Einheit Kilometer in guter Näherung die Funktionsgleichung $p(h) = 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5{,}5}}$, wobei $h \geq 0$. Auf die Mitführung der Einheiten wird somit verzichtet.

3 1.1 Berechnen Sie, in welcher Höhe $h = h_H$ der Luftdruck nur noch die Hälfte des Wertes an der Erdoberfläche annimmt.

4 1.2 Zeigen Sie, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme um $\Delta h = h_H$ unabhängig von der Ausgangshöhe h_A jeweils halbiert wird.

3 1.3 Berechnen Sie, ab welcher Höhe der Luftdruck weniger als $\frac{1}{1000}$ des Wertes an der Erdoberfläche beträgt.

3 1.4 Zeigen Sie, dass man die Funktionsgleichung auch in der Form $p(h) = 1013 \cdot e^{\frac{\ln 0{,}5}{5{,}5} \cdot h}$ schreiben kann, und berechnen Sie daraus die Ableitungsfunktion $\frac{dp(h)}{dh}$.

4 1.5 Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten $\frac{p(1) - p(0)}{1 - 0}$ sowie den Wert des Differentialquotienten der Funktion p(h) an der Stelle $h_0 = 1$ und geben Sie die physikalische Bedeutung der beiden Werte an.

2.0 Gegeben ist in der Definitionsmenge $D = \left]0; \infty\right[$ die reelle Funktion

$$f : x \mapsto 2 \cdot \frac{1 + \ln x}{x}$$

5 2.1 Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge.

6 2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und geben Sie Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von f an.
[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -2x^{-2} \ln x$]

5 2.3 Zeigen Sie, dass der Graph von f einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie seine Koordinaten.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung Analysis A I:*	
5	2.4	Für ein bestimmtes $a \in D$ verläuft die Tangente t im Punkt P(a; f(a)) an den Graphen von f durch den Koordinatenursprung. Bestimmen Sie dieses a und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente t an. [Mögliches Teilergebnis: $a = \frac{1}{\sqrt{e}}$]
5	2.5	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f für $0{,}25 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 2 cm und tragen Sie auch die Tangente t in dieses Koordinatensystem ein.
6	2.6	Zeigen Sie, dass die in der Definitionsmenge $D = \left]0;\infty\right[$ gegebene Funktion F mit $F: x \mapsto (\ln x)^2 + 2 \cdot \ln x$ eine Stammfunktion der Funktion f ist und erklären Sie genau die Bedeutung der beiden Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von f für den Graphen von F.
9	2.7	Schließen Sie aus dem Verlauf des Graphen von f auf die maximalen Monotonieintervalle der Funktion F und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte F(x) an den Rändern der Definitionsmenge. Berechnen Sie $F(e^{-2})$, $F(e^{-1})$ und $F(e^{0})$ und skizzieren Sie den prinzipiellen Verlauf des Graphen von F in einem neuen Koordinatensystem.
3	2.8	Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade x = b mit $b \in \mathbb{R}$ und $b > e^{-1}$ begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück mit dem Flächeninhalt A(b). Schraffieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 2.5 für b = 1 und zeigen Sie, dass gilt: $A(b) = (\ln b)^2 + 2 \cdot \ln b + 1$
5	2.9	Bestimmen Sie b so, dass der Flächeninhalt A(b) genau 9 Flächeneinheiten beträgt.
4	2.10	Die Tangente t aus Aufgabe 2.4, die x-Achse und der Graph von f begrenzen ein Flächenstück mit dem Flächeninhalt A_0. Berechnen Sie A_0 mit Hilfe von A(b) aus Aufgabe 2.8.
70		

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{10}{1+e^x}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
4	1.1	Begründen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_f an.
4	1.2	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und geben Sie ihre Wertemenge an.
6	1.3	Verschiebt man in einem kartesischen Koordinatensystem den Graphen G_f um 5 LE nach unten, so erhält man den Graphen G_{f^*} einer Funktion f^*. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f^*(x) = -f^*(-x)$, und geben Sie die Bedeutung dieses Zusammenhangs für den Verlauf des Graphen G_f an.
4	1.4	Zeichnen Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.
	1.5.0	Gegeben ist zusätzlich die Funktion $F: x \mapsto 10 \cdot x - 10 \cdot \ln(1+e^x)$ in der Definitionsmenge $D_F = D_f$.
5	1.5.1	Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.
7	1.5.2	Geben Sie das Steigungs- und das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion F an, bestimmen Sie die Gleichungen seiner Asymptoten und geben Sie die Wertemenge von F an. Hinweis: Für $x \to \infty$ gilt $\ln(1+e^x) \to x$.
	1.6.0	Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto \frac{10}{1+e^{2-x}}$ in der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g wird mit G_g bezeichnet. Außerdem ist bekannt, dass für die Ableitungsfunktion g' in der Definitionsmenge $D_{g'} = \mathbb{R}$ gilt: $g'(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x)]$

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE | *Fortsetzung A II:*

4 | 1.6.1 Begründen Sie mit Hilfe der gegebenen Funktionsgleichung von g', dass in der gesamten Definitionsmenge D_g der Graph G_g streng monoton steigt.

3 | 1.6.2 Zeigen Sie die Richtigkeit der Gleichung: $g'(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) \cdot [(10 - g(x)]$

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{10 \cdot e^{2-x}}{(1 + e^{2-x})^2}$]

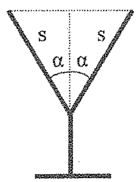
9 | 1.6.3 Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen G_g sowie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen G_g, die durch dessen Wendepunkt verläuft.

4 | 1.6.4 Zeichnen Sie für $-4 \leq x \leq 4$ den Graphen G_g und die Tangente t in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.4.

3 | 1.7 Weisen Sie nach, dass zwischen den Funktionswerten der Funktion f aus Aufgabe 1.0 und der Funktion g aus 1.6.0 für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f(1-x) = g(1+x)$ gilt, und interpretieren Sie diese Beziehung geometrisch.

4 | 1.8 Die Graphen G_f und G_g schließen zusammen mit der Geraden $y = 5$ ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 1.4 und berechnen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus der Aufgabe 1.5.1 seine Flächenmaßzahl auf eine Nachkommastelle gerundet.

2.0 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze). Das vorgegebene Innenmaß der Mantellinie wird mit s und der „halbe" Öffnungswinkel mit α bezeichnet.
Für α gilt $0° < \alpha < 90°$.



3 | 2.1 Stellen Sie die Volumenmaßzahl $V(\alpha)$ des Kelchs in Abhängigkeit von α dar.

[Mögliches Ergebnis: $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot (\sin\alpha)^2 \cdot \cos\alpha$]

10 | 2.2 Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung den Winkel α so, dass der Kelch das größtmögliche Volumen besitzt.

$\overline{70}$

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

B I

BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(5; 0; -2)$, $B(-5; 2; 2)$ und $C_k(2+k; 1; -1)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

3 1.1 Ermitteln Sie, für welche Werte von k die Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC_k}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

5 1.2 Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{R}$ durch die Punkte A, B und C_k eine Ebene E_k eindeutig festlegt ist, und bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E_k in Parameter- und Normalenform.

5 1.3 Prüfen Sie, ob man k so wählen kann, dass die Ebene
$E_k: \; x_1 + (1-2k) \cdot x_2 + (k+2) \cdot x_3 - 1 + 2k = 0$
im Koordinatensystem parallel zu einer Koordinatenachse liegt oder sogar eine Koordinatenachse enthält. Zeigen Sie auch, dass keine Ebene E_k parallel zu einer Koordinatenebene ist.

7 1.4 Betrachten Sie die Ebenen E_k, die mit den drei Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt haben. Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte in Abhängigkeit von k und untersuchen Sie, ob es Werte für k gibt, für die diese drei Schnittpunkte gleich weit vom Koordinatenursprung entfernt sind.

2.0 Gegeben sind die Ebenen
$E_1: \; x_1 - x_2 + 3x_3 + 1 = 0$
$E_2: \; x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3 = 0$

6 2.1 Bestimmen Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$ und den Schnittwinkel α der beiden Ebenen.

4 2.2 Die Ebene F enthält den Koordinatenursprung und steht auf den Ebenen E_1 und E_2 senkrecht. Ermitteln Sie die Schnittmenge $E_1 \cap E_2 \cap F$.

30

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

B II

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - x_3 - 1 = 0$ gegeben.
2	1.1	Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.
3	1.2	Die Ebene F steht senkrecht auf der Ebene E. Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden g. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform.
	1.3.0	Gegeben sind zusätzlich die Punkte A(1; 1; 2) und $B(3;\ b_2;\ b_3)$ auf der Geraden g sowie der Punkt C(3; –2; –2), der nicht auf der Geraden g, aber in der Ebene E liegt, und der Punkt $R(2;\ r_2;\ 4)$ mit $b_2,\ b_3,\ r_2 \in \mathbb{R}$.
2	1.3.1	Bestimmen Sie die Koordinaten b_2 und b_3.
6	1.3.2	Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und den Abstand des Punktes C von der Geraden g.
8	1.3.3	Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze R. Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide in Abhängigkeit von r_2 und berechnen Sie r_2 so, dass die Höhe dieser Pyramide $\sqrt{6}$ LE beträgt.
	2.0	Beim Druck mit einem Farbdrucker werden die Farbinformationen des Bildschirms, die im RGB-Farbmodell vorliegen, in eine geräteabhängige Form umgewandelt. Die Druckergrundfarben werden mit U, V und W bezeichnet. Die Umwandlung vom RGB-Modell in das UVW-Modell wird durch folgende Gleichung beschrieben: $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & -0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$
2	2.1	Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist.
4	2.2	Berechnen Sie für R = 100, G = 0 und B = 1 den Farbwert V und ermitteln Sie umgekehrt, welcher Farbwert B für die Druckausgabe U = 0, V = 4 und W = 2 notwendig ist.
3	2.3	Durch einen Fehler in einem Druckertreiber wird anstelle der zweiten Zeile der in 2.0 gegebenen Matrix M nochmals die erste Zeile verwendet. Erläutern Sie die Konsequenzen für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems.
30		