Fachabiturprüfung 2009
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Freitag, 29. Mai 2009, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

Aufgabengruppe A

A I

1 Von der ganzrationalen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f = \mathbb{R}$ dritten Grades ist die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ gegeben.
Der Graph G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y-Achse im Punkt $P\,(0\,|\,\frac{5}{4})$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. (5 BE)

2.0 Gegeben sind die Funktionen $g_a: x \mapsto \frac{1}{4}(x+1)(x^2 - 10x + a)$ mit $D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

2.1 Zeigen Sie, dass sich $g_a(x)$ auch in der Form
$g_a(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + ax - 10x + a)$ darstellen lässt und dass für $a = 5$ gilt:
$g_5(x) = f(x)$ mit der Funktion f aus Teilaufgabe 1. (3 BE)

2.2 Berechnen Sie, für welche Werte von a der Graph der Funktion g_a keinen Extrempunkt besitzt. (6 BE)

Für die folgenden Teilaufgaben ist $a = 25$ mit $g_{25}(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 15x + 25)$.

2.3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g_{25}. (3 BE)

2.4 Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion g_{25}. (6 BE)

2.5 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion g_{25} rechts- bzw. linksgekrümmt ist sowie die Koordinaten seines Wendepunktes. (4 BE)

2.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_{25} im Bereich $-1 \le x \le 7$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (5 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A I

3.0 Gegeben ist weiter die Funktion
$p: x \mapsto \frac{1}{4}(x-5)^2 - (x-5)$ mit $D_p = \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen g_{25} und p. (7 BE)

3.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \le x \le 10$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (3 BE)

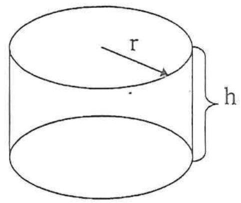
3.3 Die Graphen der Funktionen g_{25} und p schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des weiter links liegenden Flächenstücks. (5 BE)

4 Gegeben ist nun die Funktion

$$h: x \mapsto \begin{cases} g_{25}(x) & \text{für } x \le 5 \\ p(x) & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

Die Funktion h ist stetig bei $x_0 = 5$ (Nachweis nicht erforderlich!). Untersuchen Sie, ob h an der Stelle $x_0 = 5$ differenzierbar ist. (4 BE)

5.0 Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche $2400 \cdot \pi \ \text{cm}^2$. Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. Die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius r von 12 cm bis 30 cm möglich ist.



Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(r)$ der Trommel in Abhängigkeit von r auf.
[Ergebnis: $V(r) = \pi \cdot (1200r - r^3)$] (4 BE)

5.2 Berechnen Sie r so, dass das Volumen der Trommel den größten Wert (und damit die Trommel den tiefsten Ton) annimmt. (5 BE)

Aufgabengruppe A

A II

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_k : x \mapsto x \cdot \left(\frac{x^2}{k} - k - 1 \right) \text{ mit } k \in \mathbb{R} \wedge k \neq 0 \text{ und } D_{f_k} = \mathbb{R}.$$

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (8 BE)

1.2 Begründen Sie (z.B. mit Hilfe von Aufgabe 1.1), für welchen Wert k_0 der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt besitzt. (2 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt $P(-3 \mid 3)$ geht. (4 BE)

2.0 Nun sei $k = 3$. Man erhält die Funktion f_3 mit $f_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$.

2.1 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_3 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen. (6 BE)

2.2 Berechnen Sie die x-Koordinate desjenigen Punktes, in dem der Graph G_{f_3} die kleinstmögliche Steigung besitzt. Begründen Sie auch, warum es keinen Punkt gibt, in dem der Graph größtmögliche Steigung besitzt. (5 BE)

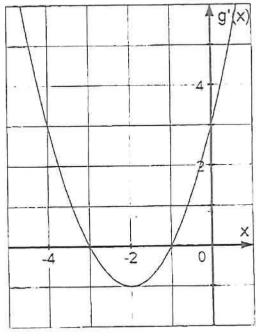
2.3 Geben Sie die Nullstellen von f_3 an und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion für $-4 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm. (5 BE)

2.4 Der Graph G_{f_3} und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

3.0 Nebenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an:



3.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt. (7 BE)

3.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g, deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt. (7 BE)

4.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe h des Zylinders und dem Durchmesser d des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet!

4.1 Berechnen Sie das Volumen V(d) eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. (5 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $V(d) = \pi \cdot \left(25d^2 - \frac{1}{4}d^3 \right)$]

4.2 Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist. (7 BE)

Aufgabengruppe S

S I

1.0 Für eine statistische Untersuchung wurden in der KFZ-Zulassungsstelle einer großen Stadt in einem bestimmten Zeitraum Aufzeichnungen über die Anzahl der Neuzulassungen von PKW mit Diesel (D)- bzw. Benzin (B)-Motor geführt. Weiterhin wurden drei Fahrzeugklassen erfasst: Kleinwagen (K), Mittelklassewagen (M) und Oberklassewagen (O). Von den Kleinwagen hatten 20% und von der Mittelklasse 50% einen Dieselmotor. Von den insgesamt 80000 erfassten PKW in dieser Untersuchung waren 45% mit einem Dieselmotor ausgerüstet, 16000 waren Kleinwagen und 8000 PKW der Oberklasse.
Die Bestimmung der Fahrzeugklasse sowie der Motorart eines zufällig herausgegriffenen PKWs dieser Untersuchung wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.1 Bestimmen Sie z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments.
[Teilergebnis: $P(\{OD\}) = 0{,}06$] (6 BE)

1.2 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug ist kein Mittelklassewagen."
E_2: „Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug besitzt einen Dieselmotor."
Geben Sie beide Ereignisse in der aufzählenden Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. (4 BE)

2.0 An einer Tankstelle werden die Fahrzeuge in der Reihenfolge ihres Eintreffens bezüglich der Motorart registriert. Untersuchungen zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Dieselfahrzeugs 0,45 und für das Eintreffen eines Benzinfahrzeugs 0,55 beträgt.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf vier Nachkommastellen:
E_3: „Von 12 Fahrzeugen sind genau die ersten 6 Dieselfahrzeuge."
E_4: „Unter 12 Fahrzeugen sind genau 5 Benzinfahrzeuge." (3 BE)

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 20 Fahrzeugen mehr als 5 aber weniger als 15 Dieselfahrzeuge befinden. (3 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S I

2.3 Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Dieselfahrzeugs an der Tankstelle sei nun p. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 2 nacheinander eintreffenden Fahrzeugen genau eines einen Dieselmotor besitzt, beträgt 0,18.
Berechnen Sie p (2 Lösungen!). (4 BE)

3.0 In einer Zulassungsstelle werden Fahrzeuge in fünf Leistungsklassen erfasst. Die Zufallsgröße X gibt die Leistungsklasse eines zufällig ausgewählten Fahrzeugs an. Mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	a	b	0,18	0,13	0,14

3.1 Berechnen Sie a und b für den Fall, dass für den Erwartungswert E(X) gilt: $E(X) = 2{,}48$. (4 BE)
[Teilergebnis: $a = 0{,}38$]

3.2 Zeichnen Sie ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung. (2 BE)

3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.
Schraffieren Sie die zu dieser Wahrscheinlichkeit gehörende Fläche im Histogramm von Teilaufgabe 3.2. (6 BE)

4.0 Jemand vermutet, dass sich der Anteil der silberfarbigen PKW von bisher 50% inzwischen modebedingt erhöht hat (Gegenhypothese). Er möchte dies an Hand von 50 vorbeifahrenden Autos testen.

4.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Berechnen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 30 silberfarbige PKW gezählt werden? (6 BE)

4.2 Erklären Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. (2 BE)

Aufgabengruppe S

S II

Beim Glücksspiel „**Roulette**" verwendet man eine drehbare Scheibe mit 36 abwechselnd roten und schwarzen Nummernfächern sowie einem 37. (grünen) Fach für die Null. Die Gewinnzahl wird mit Hilfe einer Kugel ermittelt, die nach Drehung der Scheibe in einem Nummernfach liegen bleibt, wobei alle 37 Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden können.

Im Folgenden verstehen wir unter der Farbe einer Zahl die Farbe des zugehörigen Nummernfaches, es gibt also 1 grüne Zahl sowie 18 schwarze und 18 rote Zahlen.

1 Berechnen Sie auf 4 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei siebenmaligem Werfen der Kugel

a) genau 5 mal eine rote Zahl erscheint.

b) höchstens 5 mal eine rote Zahl erscheint.

c) genau beim ersten, dritten und fünften Wurf eine rote Zahl erscheint. (7 BE)

2 Berechnen Sie ebenfalls auf 4 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei zweimaligem Werfen der Kugel

a) mindestens einmal eine Zahl aus dem ersten Dutzend, das heißt von 1 bis 12, erscheint.

b) keine Zahl aus dem ersten Dutzend zweimal erscheint. (6 BE)

3.0 Von den Zahlen des ersten Dutzends sind genau sechs rot und sechs schwarz gefärbt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

E_1: „Eine Zahl aus dem ersten Dutzend erscheint."

E_2: „Eine rote Zahl erscheint."

3.1 Erstellen Sie in Bezug auf E_1 und E_2 eine Vierfeldertafel und begründen Sie rechnerisch, ob die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind. (6 BE)

3.2 Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit: $P(E_1 \cup E_2)$. (2 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S II

4.0 Lord Grips setzt immer nur auf das Ereignis „Zahl aus dem ersten Dutzend", das heißt, seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt bei jedem Spiel $p_G = 12/37$. Lord Grips setzt nun dreimal nacheinander den gleichen Einsatz **e** auf „Zahl aus dem ersten Dutzend". Falls er in einem Spiel gewinnt, beträgt sein Reingewinn $2 \cdot e$, andernfalls geht sein Einsatz verloren ($-e$). Die Zufallsgröße X gibt den Gesamtgewinn für alle 3 Spiele in Euro an.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X lässt sich mit Hilfe folgender Tabelle angeben:

x	−3e	0	3e	6e
P(X=x)				

4.1 Übernehmen Sie die Tabelle und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Zufallswerte z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms auf 4 Nachkommastellen. (7 BE)

4.2 Setzen Sie nun **e** = 100 und berechnen Sie den Erwartungswert E(X) sowie die zugehörige Standardabweichung. (4 BE)

5.0 Im Folgenden werden Spiele, bei denen die 0 erscheint, außer Acht gelassen. Dann sollte das Ereignis „Zahl aus dem ersten Dutzend" im Schnitt in einem Drittel aller Spiele eintreten. Lord Grips vermutet, dass dieses Ereignis bei einem bestimmten Roulette-Tisch im Casino von Nepphausen mit zu geringer Häufigkeit erscheint (Gegenhypothese). Daher beobachtet er 200 Kugelwürfe in Hinblick auf „erstes Dutzend".

5.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie Null- und Gegenhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau 5 % betragen soll. (5 BE)

5.2 Erklären Sie, worin bei diesem Beispiel der Fehler 2. Art besteht und begründen Sie kurz, weshalb man dessen Wahrscheinlichkeit hier nicht berechnen kann. (3 BE)