Fachabiturprüfung 2009 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Ausbildungsrichtung Technik

Freitag, 29. Mai 2009, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

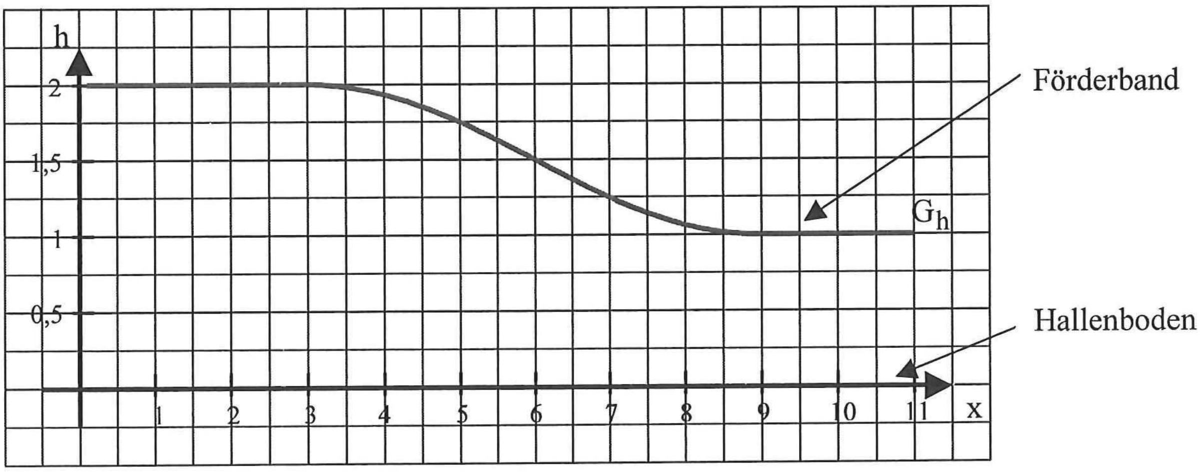
A I

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{8 \cdot e^x}{(1+e^x)^2}$ in der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
4	1.1	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.
5	1.2	Weisen Sie nach, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.
10	1.3	Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt: $f'(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cdot f(x)$ Ermitteln Sie über die maximalen Monotonieintervalle Art und Lage des Extremalpunktes des Graphen von f und geben Sie die Wertemenge der Funktion f an.
11	1.4	Weisen Sie nach, dass der Graph von f zwei Wendepunkte besitzt, und berechnen Sie deren Koordinaten auf zwei Nachkommastellen gerundet.
3	1.5	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.
2	1.6	Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto \frac{-8}{1+e^x}$ in ihrer Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.
	1.7.0	Die beiden Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ schließen mit dem Graphen von f ein Flächenstück ein, das durch den Graphen der auf $D_h = \mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto 2 \cdot e^{-x}$ in zwei Teilflächen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ zerlegt wird.
4	1.7.1	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h für $-1 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.5 ein und kennzeichnen Sie für den Sonderfall $t = 2$ die Teilflächen $A_1(2)$ und $A_2(2)$.
5	1.7.2	Berechnen Sie jeweils in Abhängigkeit von t den Flächeninhalt der beiden Teilflächen $A_1(t)$ und $A_2(t)$.
8	1.7.3	Zeigen Sie, dass für den Differenzbetrag der beiden Flächeninhalte in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt: $\lvert\Delta A(t)\rvert = \frac{8}{1+e^t} - \frac{4}{e^t}$ Beweisen Sie, dass man t nicht so wählen kann, dass die Flächeninhalte der beiden Teilflächen gleich groß sind, dass sie aber für $t \to \infty$ denselben Grenzwert haben.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE | *Fortsetzung A I:*

2.0 In einem Flughafenterminal wird die Gepäckabfertigung neu geplant. Unter anderem ist ein neues Förderband für den Transport des Gepäcks vorgesehen. Das Förderband soll zunächst horizontal verlaufen, hat jedoch auf einer Strecke von sechs Metern einen Höhenunterschied von einem Meter zu überwinden, um dann wieder horizontal weiter geführt zu werden. Der Übergang von der höher gelegenen auf die tiefere Ebene soll auf einer kosinusförmigen Kurve verlaufen. Der (nicht maßstabsgetreue) Verlauf des Förderbands ist unten schematisch als Graph G_h einer Funktion h in Abhängigkeit von x dargestellt.
x gibt dabei die Länge der zurückgelegten Strecke in horizontaler Richtung, h die vom Hallenboden aus gemessene Höhe des Förderbands in Meter an.
Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet.



7 2.1 Der in der Zeichnung abgebildete Graph G_h verläuft in der ganzen Definitionsmenge $D_h = [0; 11]$ ohne Knick. Der zugehörige Funktionsabschnitt im Bereich $3 \leq x \leq 9$ soll dabei durch die Gleichung $h(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ beschrieben werden. Entnehmen Sie der Zeichnung geeignete Funktionswerte und bestimmen Sie daraus die Konstanten a, b, c und d.

7 2.2 Die Funktion h kann für $3 \leq x \leq 9$ auch durch die Gleichung $h(x) = 0{,}5 \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + 3\right]$ beschrieben werden.
Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktionen, dass der Graph G_h an der Stelle $x = 6$ einen Wendepunkt besitzt und ermitteln Sie das prozentuale maximale Gefälle des Förderbands auf eine Nachkommastelle gerundet.

4 2.3 Das Förderband hat eine Breite von 1,20 Meter. Um eine dauerhafte Stabilität zu gewährleisten, soll im gezeichneten Bereich $0 \leq x \leq 11$ der gesamte Raum zwischen Förderband und Hallenboden mit Beton ausgefüllt werden.
Berechnen Sie das Volumen dieses Unterbaus.

70

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \to \dfrac{2ax}{x^2 + a}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ in der größtmöglichen, von a abhängigen Definitionsmenge $D_a \subseteq \mathbb{R}$.
5	1.1	Ermitteln Sie die Definitionsmenge D_a sowie Anzahl und Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a.
7	1.2	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und berechnen Sie $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f_a(x)$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an.
7	1.3	Bestimmen Sie a so, dass der Graph von f_a Extrempunkte besitzt, und berechnen Sie deren Abszissen. Begründen Sie mit dem Steigungsverhalten des Graphen von f_a die Art der Extrempunkte. [Mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = 2a \cdot (-x^2 + a) \cdot (x^2 + a)^{-2}$]
	1.4.0	Setzen Sie nun $a = 4$ und betrachten Sie die Funktion f_4.
3	1.4.1	Geben Sie die Definitionsmenge D_4 an und bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 1.3 die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_4.
10	1.4.2	Ermitteln Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f_4 und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_4.
5	1.4.3	Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und geeigneter, zusätzlich berechneter Funktionswerte den Graphen von f_4 für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm
3	1.4.4	Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_F der Funktion $F : x \to 4 \cdot \ln(x^2 + 4)$ an und zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion der Funktion f_4 ist.
5	1.4.5	Die Verbindungsstrecke zwischen dem Koordinatenursprung und dem Hochpunkt des Graphen von f_4 schließt mit dem Graphen von f_4 ein Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem der Aufgabe 1.4.3, berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts und geben Sie diese in der Form $k_1 + k_2 \cdot \ln(2)$ mit reellen Zahlen k_1 und k_2 an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE *Fortsetzung A II:*

4 1.4.6 Ermitteln Sie diejenigen Geraden aus dem Geradenbüschel g_m mit der Funktionsgleichung $g_m(x) = m \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, die mit dem Graphen von f_4 genau einen Punkt gemeinsam haben.

2.0 Gegeben ist die Gleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung:
$s(t) = 15 \cdot e^{-0,2 \cdot t} \cdot \cos(3,927 \cdot t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.
Die Elongation s ist dabei in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Physikalische Einheiten bleiben unberücksichtigt.
Gerundete Ergebnisse sind mit drei Nachkommastellen anzugeben.

2 2.1 Berechnen Sie die Elongation zur Zeit $t_0 = 0,3$ und geben Sie die größte auftretende Elongation s_{max} an.

6 2.2 Bestimmen Sie den kleinsten Wert von t, für den die Elongation $s = 0$ ist, zeigen Sie, dass das Zeitintervall Δt zwischen zwei Nulldurchgängen konstant bleibt und berechnen Sie Δt.

4 2.3 Ermitteln Sie den Funktionsterm der Geschwindigkeit $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ und berechnen Sie v(0,3), also die Geschwindigkeit zur Zeit $t_0 = 0,3$. Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens von v(0,3).

9 2.4 Ermitteln Sie mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens den kleinsten Wert von t, für den die Elongation $s = 6$ ist. Begründen Sie, warum $t_0 = 0,3$ einen geeigneten Startwert darstellt, führen Sie zwei Näherungsschritte durch und erläutern Sie das Ergebnis hinsichtlich der Genauigkeit des durchgeführten Verfahrens.

70

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

B I

BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(0; 1; -2)$, $B(-1; 2; -0{,}5)$, $C(2; 0; -4)$ und $D_k(11+k; 6+k; k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ sowie die Ebene $F\colon\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3 = 0$ gegeben.

4 1.1 Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Parameter- und in Normalenform auf.

[Mögliches Teilergebnis: $E\colon\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$]

2 1.2 Zeigen Sie, dass die Punkte D_k auf einer Geraden g liegen, und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden.

3 1.3 Bestimmen Sie k so, dass der Punkt D_k in der Ebene E liegt, und geben Sie die Koordinaten des Punktes D_k an.

4 1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E und F.

5 1.5 Der Punkt D* ist Spiegelpunkt des Punktes $D_{-5}(6; 1; -5)$ bezüglich der Ebene F. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D*.

2.0 Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem mit $t \in \mathbb{R}$:

I) $2 \cdot x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 + 9{,}5 = t$

II) $x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 6 = 0$

III) $t \cdot (x_1 + x_2) - 6 \cdot x_3 + 3 = 0$

8 2.1 Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

4 2.2 Interpretieren Sie die gegebenen Gleichungen als Ebenengleichungen und bestimmen Sie für $t_0 = 1{,}5$ die Schnittmenge der drei Ebenen.

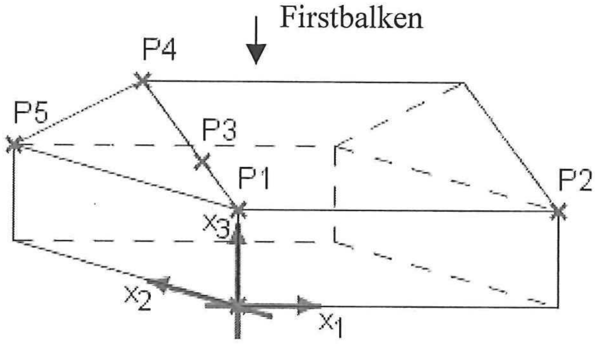
30

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

B II

BE

Ein denkmalgeschütztes, fast verfallenes Gebäude soll wieder aufgebaut werden. Nebenstehende Skizze zeigt den Originalzustand des Hauses in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die horizontale Grundfläche liegt in der x_1, x_2-Ebene. Durchgeführte Vermessungen haben ergeben, dass die Punkte $P_1(0;\,0;\,3)$, $P_2(10;\,0;\,3)$ und $P_3(0;\,2;\,4)$ auf der vorderen Dachfläche liegen.
Die Koordinaten geben die jeweilige Länge in Meter an, die Einheiten dürfen weggelassen werden..



4 1 Stellen Sie eine Gleichung in Koordinatenform für die Ebene E auf, in der die vordere Dachfläche liegt, und geben Sie die besondere Lage dieser Ebene im Koordinatensystem an.

[Mögliches Ergebnis: $-x_2 + 2x_3 - 6 = 0$]

3 2 Der Winkel α zwischen der horizontalen Ebene und der Ebene E wird als Dachneigung bezeichnet. Berechnen Sie α.

2 3 Die hintere Dachfläche liegt in der Ebene F, die durch die Gleichung $x_2 + 2x_3 - 20 = 0$ gegeben ist. Begründen Sie, dass die beiden Dachflächen die gleiche Dachneigung α besitzen, ohne den Winkel zwischen der horizontalen Ebene und der Ebene F zu berechnen.

4 4 Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden f, entlang der der Firstbalken des Daches verläuft.

[Mögliches Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$]

6 5 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P_4 in der x_2, x_3-Ebene (siehe Skizze), die Sparrenlänge $\overline{P_1P_4}$ sowie den Flächeninhalt der gesamten Dachfläche.

6 6 Der Sparren zwischen P_1 und P_4 soll vom Punkt $K(4;\,6;\,0)$ aus mit einer Stütze, die mit dem Sparren einen rechten Winkel einschließt, stabilisiert werden. Berechnen Sie die Länge dieser Stütze sowie die Koordinaten ihres Befestigungspunktes L am Sparren.

5 7 Zur Bestimmung des Volumens des umbauten Raumes ist zusätzlich der Punkt $P_5(0;\,14;\,3)$ gegeben. Gegenüberliegende Hauswände sind zueinander parallel. Berechnen Sie das Volumen des umbauten Raumes sowie den prozentualen Anteil, den das Dachgeschoss davon einnimmt.

30