Fachabiturprüfung 2010

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Dienstag, 08. Juni 2010, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

Aufgabengruppe A

A I

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a. (5 BE)

1.2 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P(4 \mid -\frac{1}{2})$ auf dem Graphen der Funktion f_a liegt. (3 BE)

2.0 Nun wird $a = 3$ gesetzt. Die Funktion f_3 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x-5)^2$.

2.1 Zeigen Sie, dass sich die Funktion f auch in der Form
$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x)$ darstellen lässt. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. (9 BE)

2.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-0{,}25 \le x \le 6$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (4 BE)

2.4 Der Graph der Funktion f und die x-Achse schließen im 4. Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau. (4 BE)

3.0 Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion

$A : t \mapsto A(t)$ mit $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + at^2 + bt + c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $t \in [0; 5]$

beschrieben werden kann, wobei A(t) die bedeckte Fläche (in mm^2) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet.

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A I

Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums ($t = 0$) die von den Bakterien bedeckte Fläche 1 mm^2 groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit 5 mm^2 erreicht.

3.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c und damit A(t). (6 BE)

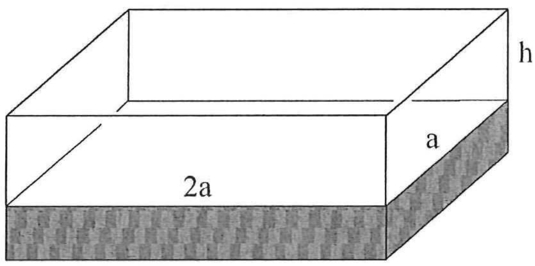
[Ergebnis: $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$]

3.2 Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau. (2 BE)

3.3 Ermitteln Sie die Wendestelle t_W der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (5 BE)

3.4 Zeichnen Sie für $t \in [0;\ 5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe vorliegender Ergebnisse. (3 BE)

4.0 Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge 2a, der Breite a und der Höhe h. Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt.



Die lichtdurchlässige Oberfläche soll 4 m^2 betragen.
Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

4.1 Bestimmen Sie das Volumen V(a) des Daches in Abhängigkeit von a.
[Mögliches Ergebnis: $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$]. (4 BE)

4.2 Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: a \mapsto V(a)$ für den in 4.0 gegebenen Sachzusammenhang. (5 BE)

4.3 Ermitteln Sie a so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe h. (7 BE)

Aufgabengruppe A

A II

1.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(4\,|\,0)$, schneidet die y-Achse im Punkt $(0\,|\,3)$ und hat an der Stelle $x_W = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{16}\left(x^3 - 7x^2 + 8x + 16\right)$] (9 BE)

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheiten. (5 BE)

1.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau. (5 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1{,}5 \le x \le 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm (4 BE)

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$g_a : x \mapsto \frac{1}{8}\left(ax^4 - 4x^3\right)$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $D_{g_a} = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_{g_a} bezeichnet.

2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte mit waagrechter Tangente des Graphen G_{g_a} und deren Art. (7 BE)

2.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen G_{g_a}. (7 BE)

2.3 Berechnen Sie a so, dass die Graphen G_f aus Teilaufgabe 1.1 und G_{g_a} bei $x = 4$ einen gemeinsamen Punkt besitzen. (2 BE)
[Ergebnis: $a = 1$]

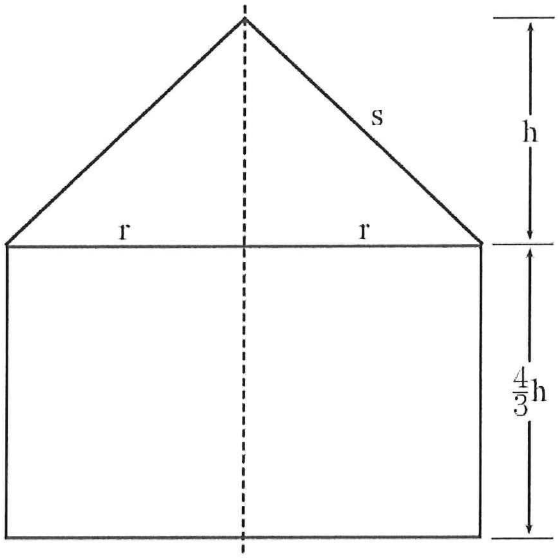
2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_1 mit $g_1(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ im Bereich $-1{,}5 \le x \le 4{,}5$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

2.5 Die Graphen G_f und G_{g_1} schließen im 1. und 4. Quadranten zusammen mit der y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. (5 BE)

3.0 Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe h ist kegelförmig (siehe nebenstehende Skizze des Querschnitts). Die Mantellänge s des Kegels beträgt $15\,\text{m}$. Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt.



3.1 Stellen Sie die Maßzahl V des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an. (6 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \left(375h - \frac{5}{3}h^3\right) \cdot \pi$]

3.2 Berechnen Sie h so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert V_{max} des maximalen Volumens. (6 BE)

Aufgabengruppe S

S I

1.0 Ein Campingplatzbesitzer stellt für die neue Saison seine Reservierungs- und Abrechnungsmodalitäten aus Vereinfachungsgründen um. Er vermietet nur noch große (g), mittlere (m) und kleine (k) Stellplätze, die jeweils mit Stromanschluss (S) oder ohne ($\overline{S}$) gebucht werden können. Aus den vergangenen Jahren hat er folgende Informationen:
Von allen Mietern entscheiden sich 50% für einen großen und 30% für einen mittleren Stellplatz. Mieter auf dem großen Stellplatz entscheiden sich zu 70% für einen Stromanschluss, bei dem kleinen Stellplatz sind es nur 30%. Von allen Mietern entscheiden sich 18% für einen mittleren Stellplatz mit Stromanschluss.
Die Auswahl eines beliebigen Stellplatzes und die Entscheidung für oder gegen einen Stromanschluss wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.1 Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse. (5 BE)

1.2 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Ein Stellplatz mit Stromanschluss wird gewählt.“
E_2: „Es wird ein mittlerer oder kleiner Stellplatz gewählt.“
Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit sowie auf Unvereinbarkeit. (7 BE)

1.3 Gegen Ende einer Saison sind erfahrungsgemäß noch 30 Stellplätze belegt. Es gelten weiterhin die Wahrscheinlichkeiten aus 1.0.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_3: „Es sind genau 10 Stellplätze mittlerer Größe belegt.“
E_4: „Es sind mehr als acht und höchstens 15 große Stellplätze belegt.“
E_5: „Es ist höchstens ein kleiner Stellplatz ohne Stromanschluss belegt.“
(7 BE)

1.4 Erfahrungsgemäß haben 85% der Camper im Voraus gebucht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den nächsten 20 Ankommenden genau drei nicht vorgebucht haben und diese hintereinander folgen. (3 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S I

2.0 Der Campingplatzbetreiber hat nun die Plätze je nach Lage in die drei Qualitätsstufen A, B und C unterteilt. In jeder Lage kann der Platz mit (S) oder ohne ($\overline{S}$) Stromanschluss gewählt werden. Die Zufallsgröße X gibt die Nummer der Kategorie des gebuchten Platzes an. Auf Grund langjähriger Aufzeichnungen geht er von folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ aus:

ω	$A\overline{S}$	AS	$B\overline{S}$	BS	$C\overline{S}$	CS
x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0	0,15	0,03	0,21	a	b

2.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn $E(X) = 4{,}8$ gilt.
[Teilergebnis: a = 0,09] (4 BE)

2.2 In einer Aktionswoche werden die Stellplatzkosten pro Tag auf 10 € für einen Stellplatz der Lage A, 14 € für Lage B und 18 € für Lage C festgesetzt. Der Stromanschluss ist dabei **nicht** enthalten. Die Kosten für einen Stromanschluss sind unabhängig von der Wahl des Stellplatzes jeweils gleich und sollen so festgelegt werden, dass der Besitzer bei täglich 50 belegten Stellplätzen durchschnittlich 880 € einnimmt.
Berechnen Sie, was ein Stromanschluss pro Tag unter diesen Bedingungen für den Urlauber kostet. (6 BE)

3.0 Der Campingplatzbesitzer bezieht von einem Flüssiggaslieferanten 5 kg-Gasflaschen. Der Lieferant garantiert, dass das Füllgewicht nur in 3% aller Fälle unterschritten wird. Der misstrauische Campingplatzbesitzer vermutet, dass mehr als 3% der Gasflaschen das Füllgewicht unterschreiten (Gegenhypothese). Zur Überprüfung testet der Lieferant aus einer größeren Lieferung 100 Flaschen.

3.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau 5% betragen soll. (6 BE)

3.2 Erklären Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. (2 BE)

Im Folgenden werden auftretende relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einer groß angelegten Verkehrskontrolle der Polizei wurden insgesamt 500 LKW auf Mängel überprüft. Es stellte sich heraus, dass bei 85% der LKW die Bremsen in Ordnung waren (B), bei 120 LKW die Reifen zu wenig Profiltiefe aufwiesen ($\overline{R}$) und bei 80% der LKW die Lichtanlage nicht zu beanstanden war (L).
Die Untersuchung eines zufällig herausgegriffenen LKW auf die drei Mängelarten wird als Zufallsexperiment aufgefasst, wobei die drei Mängelarten voneinander unabhängig auftreten.

1.1 Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. (5 BE)

1.2.0 Gegeben sind folgende Ereignisse:
E_1: „Ein zufällig ausgewählter LKW hat mindestens 2 Mängel."
E_2: „Bei einem zufällig ausgewählten LKW sind die Bremsen defekt und die Reifen weisen nicht die entsprechende Profiltiefe auf."

1.2.1 Stellen Sie die Ereignisse E_1 und E_2 in aufzählender Mengenschreibweise dar und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten. (4 BE)

1.2.2 Untersuchen Sie die Ereignisse E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. (3 BE)

1.3 Erfahrungsgemäß sind bei 25% der kontrollierten LKW die Papiere nicht in Ordnung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig überprüften LKW die Anzahl der LKW-Fahrer, deren Papiere in Ordnung sind, innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (4 BE)

2.0 Auf Grund von Kontrollen weiß man, dass bei 81,45% der mit genau 4 Personen besetzten PKW alle Insassen angeschnallt sind. Die Wahrscheinlichkeit für das Anlegen des Gurtes ist auf jedem Sitzplatz gleich. Ein mit 4 Personen besetzter PKW wird kontrolliert.

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S II

2.1 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig herausgegriffener Insasse angeschnallt ist, ziemlich genau 0,95 beträgt. (2 BE)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf vier Nachkommastellen gerundet:
E_3: „Die beiden Personen auf den Vordersitzen sind angeschnallt, diejenigen auf den Rücksitzen nicht."
E_4: „Genau zwei Personen in einem PKW sind angeschnallt." (4 BE)

2.3 In einer späteren Kontrolle soll untersucht werden, ob sich der Anteil der angeschnallten Personen erhöht hat (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test mit 50 zufällig ausgewählten PKW, die jeweils mit genau vier Personen besetzt sind, durchgeführt.
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.
Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 97% der kontrollierten Personen angeschnallt sind? (7 BE)

3.0 Für einen Autohersteller soll untersucht werden, ob weibliche Autofahrer Cabrios eher bevorzugen als männliche. Dazu wird eine Stichprobe von 200 PKW betrachtet. 60 Fahrerinnen (W) wurden gezählt, davon 3 in einem Cabrio (C). Insgesamt gab es 10 Cabrios in der Stichprobe. Ein beliebiger PKW aus den 200 wird herausgegriffen.

3.1 Beschreiben Sie die Ereignisse
$E_5 = \overline{W} \cup \overline{C}$ und
$E_6 = \overline{W \cup \overline{C}}$
möglichst einfach mit Worten. (3 BE)

3.2 Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel $P(E_5)$ und $P(E_6)$. (5 BE)

3.3 Kann aus der Untersuchung gefolgert werden, dass Frauen häufiger Cabrios bevorzugen als Männer? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)