Fachabiturprüfung 2010 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Dienstag, 8. Juni 2010, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 4 \cdot \frac{1+\ln(1-x)}{1-x}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge D_f.
3	1.1	Zeigen Sie, dass $D_f =]-\infty;\, 1[$ gilt, und berechnen Sie den exakten Wert der Nullstelle der Funktion f.
4	1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) an den Rändern der Definitionsmenge.
7	1.3	Bestimmen Sie über die maximalen Monotonieintervalle Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von f.
		[Teilergebnis: $f'(x) = 4 \cdot \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}$]
3	1.4	Bestimmen Sie die Wertemenge der Funktion f mithilfe bisheriger Ergebnisse.
8	1.5	Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und ermitteln Sie die exakten Koordinaten seines Wendepunktes W.
5	1.6	Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt W und berechnen Sie deren Schnittpunkt mit der x-Achse.
		[mögliches Teilergebnis: t: $y = \frac{2}{e} \cdot x + \frac{8 \cdot \sqrt{e} - 2}{e}$]
4	1.7	Zeichnen Sie mithilfe der vorliegenden Ergebnisse den Graphen der Funktion f und die Tangente t für $-6 \le x \le 0{,}7$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.
7	1.8	Im zweiten Quadranten liegt ein Punkt $P(k; f(k))$ auf dem Graphen von f, dessen Koordinaten die Bedingung $f(k) = -k$ erfüllen. Entnehmen Sie Ihrem Graphen einen geeigneten Startwert k_0 und berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Stelle k. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.
7	1.9	Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -2 \cdot \left[\ln(1-x)\right]^2 - 4 \cdot \ln(1-x)$ in ihrer Definitionsmenge $D_F = D_f$ eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das vom Graphen von f, der Tangente t und der y-Achse eingeschlossen wird. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A I:*	
	2.0	Das Hinterrad eines Traktors übt auf den Ackerboden an der Oberfläche einen Druck von $4{,}0 \cdot 10^4$ Pa aus. Der Druck nimmt mit zunehmender Tiefe unter der Oberfläche ab und beträgt in 1,0 m Tiefe nur noch ein Viertel des Wertes an der Oberfläche. Für die Abhängigkeit des Drucks p in Pascal (Pa) von der Tiefe x in Meter gilt in einem mathematischen Modell die Funktionsgleichung $p(x) = a \cdot e^{-bx^2}$, wobei $x \geq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Auf das Mitführen der Einheiten kann verzichtet werden.
3	2.1	Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b. [Mögliche Ergebnisse: $a = 4{,}0 \cdot 10^4$, $b = 2 \cdot \ln(2)$]
3	2.2	Stellen Sie den Druck p in Abhängigkeit von der Tiefe x für $0 \leq x \leq 1{,}5$ graphisch dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab.
4	2.3	Entnehmen Sie Ihrem Diagramm die ungefähre Tiefe, in der der Druck halb so groß ist wie an der Oberfläche, und berechnen Sie dann diese Tiefe genau.
4	2.4	Berechnen Sie die lokale Änderungsrate des Drucks in 0,50 m Tiefe.
8	2.5	Bestimmen Sie, in welcher Tiefe die lokale Änderungsrate des Drucks betragsmäßig am größten ist, und berechnen Sie diese lokale Änderungsrate.
70		

Aufgabengruppe A: Analysis

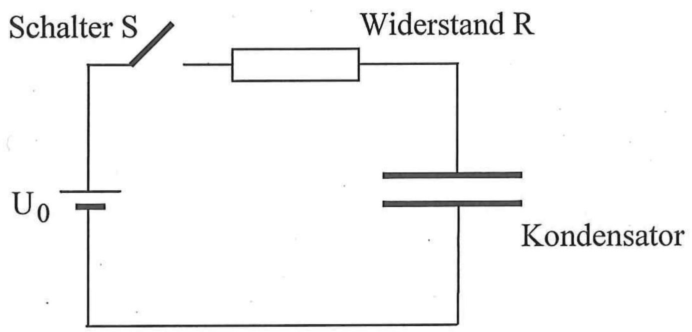
A II

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
4	1.1	Ermitteln Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.
6	1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ in der Nähe der Definitionslücke sowie für $\lvert x \rvert \to \infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.
14	1.3	Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die jeweils maximalen Monotonieintervalle der Funktion f_a, geben Sie diejenigen Werte von a an, für die der jeweilige Graph von f_a einen Extrempunkt hat, und ermitteln Sie dessen Art und Lage in Abhängigkeit von a. Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle a = 0, a > 0 und a < 0. [mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x^3}$]
5	1.4	Untersuchen Sie, für welche Werte von a der Graph von f_a einen Wendepunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten in Abhängigkeit von a.
4	1.5	Setzen Sie nun $a = 1$ und zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte für $-5 \leq x \leq 5$ den Graphen von f_1 mit seinen Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.
3	1.6	Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t im Punkt $P(1;\ f_1(1))$ an den Graphen von f_1 und zeichnen Sie die Tangente t in das Diagramm der Aufgabe 1.5 ein. [mögliches Teilergebnis: $t\colon y = -x + 2$]
5	1.7	Für $0 < k < 1$ schließen die Gerade mit der Gleichung $x = k$, der Graph von f_1 und die Tangente t ein endliches Flächenstück A_k ein. Markieren Sie dieses Flächenstück für $k = 0{,}5$ im Diagramm der Aufgabe 1.5 und zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A(k) der Fläche A_k in Abhängigkeit von k gilt: $A(k) = \frac{k^2 + k \cdot \ln(k) + 1}{k} - \frac{k^2 + 3}{2}$
6	1.8	Beweisen Sie zunächst, dass gilt: $\lim\limits_{\substack{k \to 0 \\ k > 0}} [k \cdot \ln(k)] = 0$. Untersuchen Sie dann, ob der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{k \to 0 \\ k > 0}} A(k)$ existiert, und erklären Sie, was Ihr Ergebnis geometrisch bedeutet.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE | *Fortsetzung A II:*

2.0 Ein Doppelschicht-Kondensator ist entsprechend der gegebenen Schaltung mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, die eine konstante Spannung $U_0 = 5{,}00\ \text{V}$ liefert. Der Widerstand R des Stromkreises beträgt $10\ \Omega$.
Wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Schalter S geschlossen, beginnt der Kondensator sich aufzuladen. Der zeitliche Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung in Volt (V) wird beschrieben durch die Gleichung:
$U_C(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\alpha \cdot t})$, wobei $\alpha = 2{,}50 \cdot 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$



3 | 2.1 Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} U_C(t)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Grenzwerts.

5 | 2.2 Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Kondensatorspannung $U_C(t)$ sowie für die am Widerstand R anliegende Spannung $U_R(t)$ für $0 \le t \le 100\ \text{s}$ mit einer Schrittweite von $\Delta t = 20\ \text{s}$ und stellen Sie $U_C(t)$ und $U_R(t)$ in einem gemeinsamen Diagramm graphisch dar.
Hinweis: Offensichtlich gilt zu jedem Zeitpunkt $U_0 = U_C + U_R$.
Maßstäbe: 1 cm entspricht 10 s bzw. 1 V.

5 | 2.3 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Spannung U_C zur Zeit $t_0 = 0$ sowie ihren Grenzwert für $t \to \infty$. Stellen Sie eine Gleichung der (einseitigen) Tangente an den Graphen von U_C im Ursprung auf und zeichnen Sie diese Tangente in das Diagramm der Aufgabe 2.2 ein.

3 | 2.4 In dem gegebenen Stromkreis gilt für die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t die Gleichung: $I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\alpha \cdot t}$
Stellen Sie in einem neuen Diagramm die Stromstärke I in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar.

7 | 2.5 Die Stromstärke I ist definiert als die Ableitung der transportierten Ladung Q nach der Zeit t: $I(t) = \dot{Q}(t)$
Ermitteln Sie eine Gleichung, die den zeitlichen Verlauf der Ladung Q(t) des Kondensators angibt, berechnen Sie Q(60 s) und veranschaulichen Sie diesen Wert im Diagramm der Aufgabe 2.4. Berechnen Sie außerdem $\lim\limits_{t \to \infty} Q(t)$.

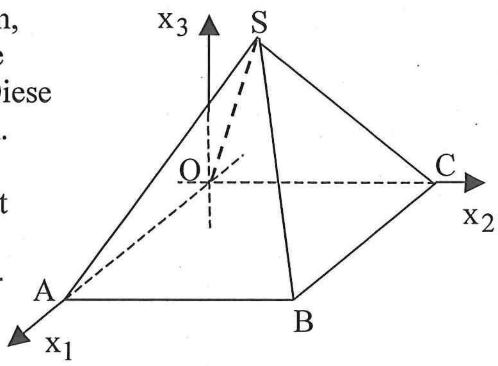
70

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

B I

BE

Vor dem Louvre, dem berühmten Pariser Kunstmuseum, wurde im Jahre 1989 eine Glaspyramide erbaut, welche den unterirdisch liegenden Haupteingang beherbergt. Diese Pyramide wurde der Cheops-Pyramide nachempfunden. Die Seitenlänge der quadratischen, nach unten offenen Grundfläche beträgt 35 m und die Spitze S liegt lotrecht über deren Mittelpunkt in einer Höhe von 22 m. In einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem (1 LE = 1 m) sind der Ursprung O und der Punkt $B(35; 35; 0)$ zwei Eckpunkte der in der x_1, x_2-Ebene liegenden horizontalen Grundfläche. Die Skizze zeigt die prinzipielle Lage der Pyramide.



2 1 Geben Sie die Koordinaten der beiden Eckpunkte A und C sowie der Spitze S an.

4 2 Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Normalengleichung der Ebene E, in der die Punkte A, B und S liegen.

[Mögliches Teilergebnis: $E: \ 22 \cdot x_1 + 17{,}5 \cdot x_3 - 770 = 0$]

4 3 Berechnen Sie den Neigungswinkel einer Seitenfläche gegenüber der Grundfläche.

3 4 Berechnen Sie den Flächeninhalt einer der vier gläsernen Seitenflächen.

5.0 An einem im Punkt S befestigten Seil wurde eine nach allen Seiten gleichmäßig Licht abstrahlende Lampe so aufgehängt, dass die Lichtstrahlen im Schwerpunkt jeder Seitenfläche senkrecht auftreffen.

7 5.1 Zeigen Sie, dass der Punkt $M\left(\frac{175}{6}; \frac{35}{2}; \frac{22}{3}\right)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABS ist, und zeigen Sie, dass der Aufhängepunkt P der als punktförmig angenommene Lampe unterhalb der offenen Grundfläche OABC liegt.

5 5.2 Die Position der Lampe kann für spezielle Lichteffekte durch Veränderung der Seillänge verändert werden. Berechnen Sie den Abstand der Lampe von der Seitenkante OS, wenn die Lampe auf Höhe der x_1, x_2-Ebene angebracht wird.

5 6 Vor der Pyramide steht ein senkrechter Fahnenmast, dessen Spitze F die Koordinaten $F(40; 30; 8)$ besitzt. Paralleles Sonnenlicht mit dem Richtungsvektor $\vec{l} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ erzeugt auf der Seitenfläche ABS der Pyramide den Schattenpunkt F_S der Spitze F. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes F_S.

30

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

B II

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(1; 0; -2)$, $B(-1; 2; 2)$ und $C_k(k; -k; -2-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.
3	1.1	Untersuchen Sie, für welche Werte von k die drei Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC_k}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
4	1.2	Die Punkte O, A, B und C_k bilden jeweils ein Tetraeder. Berechnen Sie alle Werte von k, für die das Volumen des zugehörigen Tetraeders 1 VE beträgt.
4	1.3	Bestimmen Sie k so, dass der zugehörige Punkt C_k von den Punkten A und B gleich weit entfernt ist.
	1.4.0	Die Punkte A und B legen die Gerade g fest, die Punkte C_k liegen auf der Geraden h.
5	1.4.1	Geben Sie für die beiden Geraden g und h jeweils eine Gleichung an und untersuchen Sie die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden.
8	1.4.2	Stellen Sie eine Gleichung der Geraden i auf, die die beiden Geraden g und h jeweils senkrecht schneidet.
	2.0	Die Punkte A, B und C_k aus 1.0 legen für jeden Wert von k genau eine Ebene E_k fest.
2	2.1	Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_k in Normalenform. [Mögliches Ergebnis: $E_k: \; kx_1 + (k-2)x_2 + x_3 - k + 2 = 0$]
4	2.2	Gegeben ist außerdem die Ebene H: $x_1 - x_2 - 2x_3 + 19 = 0$ Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S, der sowohl auf der Ebene H als auch auf jeder Ebene E_k liegt.
30		