Fachabiturprüfung 2011

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Mittwoch, 01. Juni 2011, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

Aufgabengruppe A

A I

1 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a. (6 BE)

2.0 Nun wird $a = 2$ gesetzt. Die Funktion f_2 wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet. Es gilt: $f(x) = \frac{1}{9}(x-2)(x^2+3x-10)$.

Die Funktion lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{9}(x^3+x^2-16x+20)$ darstellen (Nachweis nicht erforderlich).

2.1 Begründen Sie ohne weitere Rechnung und mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1, dass die Funktion f genau zwei Extremstellen hat. (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. (6 BE)

2.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist. (4 BE)

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-5{,}5 \le x \le 3$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. (4 BE)

3.0 Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion p. Der Graph von p besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) an der Stelle $x = -1$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). (7 BE)

[Ergebnis: $p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$]

3.2 Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-5{,}5 \le x \le 1$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.4. Berechnen Sie dazu die Nullstellen von p sowie die Koordinaten des Scheitels. (5 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A I

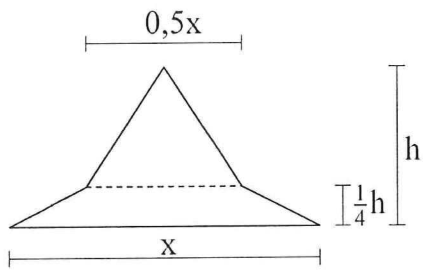
3.3 Die Koordinatenachsen und die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe 2) und p schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau. (7 BE)

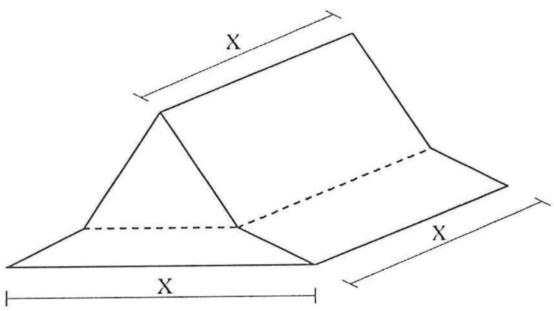
4 Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20) & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{4}{9}(x^2 - 4x + 4) & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Funktion h an der Nahtstelle $x_0 = -1$ differenzierbar ist. (5 BE)

5.0 Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und die Breite der Praline beträgt jeweils x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.





Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.

5.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen V(x) der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an. (7 BE)

[Teilergebnis: $V(x) = -0{,}75x^3 + 3x^2$]

5.2 Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt.

Berechnen Sie hierfür auch die Höhe h der Praline. (6 BE)

Aufgabengruppe A

A II

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_f an. (5 BE)

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. (6 BE)

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte. (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-3{,}5 \le x \le 3{,}5$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. (5 BE)

2.0 Gegeben sind nun die reellen Funktionen $f_a: x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - a$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.
Für $a = 3$ erhält man die Funktion aus Aufgabe 1. Die Ergebnisse aus Aufgabe 1 können bei den folgenden Aufgaben verwendet werden.

2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten aller relativer Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. (3 BE)

2.2 Bestimmen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 2.1 die Anzahl und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a. (6 BE)

3.0 Gegeben ist weiterhin die Funktion p durch $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ mit $D_p = \mathbb{R}$.

3.1 Zeigen Sie, dass p genau zwei gemeinsame Nullstellen mit der Funktion f aus Aufgabe 1 hat. Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-4 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4. (4 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

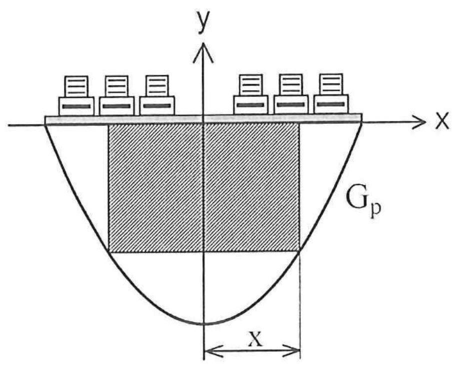
Fortsetzung A II

3.2 Die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe 1) und p schließen drei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl desjenigen Flächenstücks, das den Ursprung enthält, auf zwei Nachkommastellen genau. (5 BE)

3.3 Die in 3.2 beschriebene Fläche stellt die Form eines Firmenlogos dar. Es soll aus einer dünnen Styroporplatte ausgesägt werden. Die Platte wird durch die Geraden mit den Gleichungen $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = -3$ und $y = 1$ von außen begrenzt. Berechnen Sie den Anteil des Abfalls nach dem Aussägen in Prozent. (3 BE)

4 Gegeben ist die reelle Funktion H durch $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
H ist eine Stammfunktion der ganzrationalen Funktion h.
Bestimmen Sie den Funktionsterm H(x), wenn der Graph der Funktion h punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und $W\left(-3 \mid \frac{3}{4}\right)$ ein Wendepunkt des Graphen G_H ist. (7 BE)

5.0 Der Gepäckraum eines Flugzeuges kann im Querschnitt mithilfe der Funktion $p: x \mapsto 0{,}5x^2 - 3{,}125$ beschrieben werden. Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung).



Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden.

5.1 Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche A(x) der Container in Abhängigkeit von x auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge. (4 BE)
[Teilergebnis: $A(x) = -x^3 + 6{,}25x$]

5.2 Berechnen Sie x so, dass die Querschnittsfläche der Container den größten Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Breite und Höhe der Container. (6 BE)

Aufgabengruppe S

S I

1.0 Die Eisdiele BAVARIA bietet unterschiedliche Eisbecher an. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Eigentümer, dass 60% der Gäste einen Eisbecher mit Fruchteis (F) bestellen. Zudem ist bekannt, dass 70% aller Eisbecher mit Sahne (S) bestellt werden. 10% der Eisbecher werden ohne Fruchteis und ohne Sahne bestellt.

1.1 Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die Ereignisse F und S stochastisch unabhängig sind. (5 BE)

1.2 Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{\overline{F} \cup S}$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an. (3 BE)

2.0 Die Eisdiele BAVARIA unterhält im Sommer einen Eisstand an einem Badesee. Jeweils 25% der Kunden kaufen dort 1, 2, 3 oder 4 Kugeln Eis (es werden maximal 4 Kugeln pro Bestellung verkauft!).
Die Kugeln werden normalerweise in der Waffel (w) ausgegeben. Beim Kauf von 3 oder 4 Kugeln kann der Kunde auch einen Becher (b) wählen, was jeweils jeder zweite dieser Kunden wünscht. Außerdem können Käufer von 3 oder 4 Kugeln das Eis mit Sahne (s) oder ohne Sahne bestellen.
Unabhängig davon, ob das Eis im Becher oder in der Waffel verkauft wird, wählen 60% der Kunden, die 3 Kugeln bestellen, auch Sahne, bei den Kunden mit 4 Kugeln sind dies nur 40%.
Das Zufallsexperiment besteht in der Feststellung, wie viele Kugeln Eis ein beliebig ausgewählter Kunde kauft, ob das Eis in der Waffel oder im Becher ausgegeben wird und ob Sahne gewünscht wird.

2.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms alle 10 Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten. (6 BE)

2.2 Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: „Ein Kunde bestellt mehr als eine Kugel Eis.“
E_2: „Ein Kunde erhält keine Sahne.“
E_3: „Ein Kunde erhält das Eis im Becher, aber ohne Sahne.“
Geben Sie die Ereignisse E_3 und $E_4 = E_1 \cap E_2$ in aufzählender Mengenschreibweise an und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten. (4 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S I

2.3 Eine Kugel Eis und eine Portion Sahne kosten jeweils 1,00 €.
Die Zufallsgröße X gibt den Preis einer Bestellung an.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und stellen Sie sie geeignet graphisch dar. (5 BE)

Berechnen Sie bei den folgenden Aufgaben die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen.

3.0 Bei einem Wandertag kommt eine Klasse mit 25 Schülerinnen und Schülern an einem Eisstand vorbei. Der Lehrer kauft jedem Schüler eine Kugel Eis. Erfahrungsgemäß sind 40% aller verkauften Kugeln Schokoladeneiskugeln.

3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Schokoladeneiskugeln, die der Lehrer für seine Klasse bezahlt, innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. (5 BE)

3.2 Nachdem die ersten 14 Schüler ihr Eis erhalten haben, merkt der Eisverkäufer, dass das Schokoladeneis nur noch für zwei Kugeln reicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle weiteren Bestellungen erfüllt werden können, wenn von den restlichen Eissorten noch genügend vorhanden ist. (3 BE)

3.3.0 Der Eisverkäufer vermutet, dass der Anteil der verkauften Schoko-Eiskugeln höher als sonst liegt (Gegenhypothese) und will diese Vermutung anhand von 200 Bestellungen von jeweils einer Kugel Eis überprüfen.

3.3.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 10%-Niveau. (6 BE)

3.3.2 Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht. Wie muss sich der minimale Annahmebereich von H_0 verändern, wenn das Signifikanzniveau abgesenkt wird? (3 BE)

Aufgabengruppe S

S II

1.0 Ein Händler für Baby- und Kleinkinderspielwaren hat in seinem Sortiment unter anderem Spielzeuge aus Holz (H). Die Hersteller der Spielzeuge kommen allesamt entweder aus Europa (E) oder aus Asien (A). Weiterhin sind einige Spielzeuge mit einer Rasselfunktion (R) ausgestattet.
Insgesamt sind 60% der Spielzeuge im Sortiment aus Holz. Von diesen Holzspielzeugen kommen 78% aus Europa. Insgesamt kommen 48% der Spielzeuge aus Europa. Unabhängigkeit von Beschaffenheit und Herkunft haben 30% der Spielzeuge eine Rasselfunktion.

1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.
[Teilergebnis: $P(\{\overline{H}A\overline{R}\}) = 0{,}2716$] (6 BE)

1.2 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug ist aus Holz."
E_2: „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug kommt aus Asien."
Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. (4 BE)

1.3 Nun werden 10 Spielzeuge zufällig nacheinander ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_3: „Genau 3 sind mit einer Rasselfunktion ausgestattet."
E_4: „Mindestens 9 sind ohne Rasselfunktion."
E_5: „Es sind genau drei mit Rasselfunktion und diese folgen hintereinander." (5 BE)

2.0 Eine Verbraucherschutzorganisation untersucht ausschließlich Spielzeug aus Holz. Dabei werden bei einem Anteil von p Mängel festgestellt.
Nun werden 5 Holzspielzeuge zufällig ausgewählt und auf Mängel untersucht. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Spielzeuge mit Mängeln an.

2.1 Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für genau 5 einwandfreie Spielzeuge 0,4182 beträgt. (3 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S II

2.2.0 Der Anteil mängelbehafteter Holzspielzeuge sei $p = 0{,}16$.

2.2.1 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form dar. Geben Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen genau an. (5 BE)

2.2.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X > 3)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sinne der vorliegenden Thematik. (3 BE)

2.2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (4 BE)

3.0 Längeren Erfahrungen zu Folge betrug der Anteil der Spielzeuge aus Kunststoff, welche einen unzulässig hohen Anteil an gesundheitsschädlichem Weichmacher enthielten, genau 15 %.
Es wird vermutet, dass sich der Anteil der nicht zulässigen Spielzeuge erhöht hat (Gegenhypothese). Es werden 200 zufällig ausgewählte Spielzeuge aus Kunststoff auf Weichmacher getestet.

3.1 Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese, wenn das Signifikanzniveau 5 % betragen soll. (6 BE)

3.2 Berechnen Sie bei diesem Test (vgl. 3.1) die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und erläutern Sie ihn im Sinne der Thematik. (4 BE)