10. Klasse der Hauptschule

Abschlussprüfung zum Erwerb
des Mittleren Schulabschlusses
2008

(25. Juni 2008 von 8.30 bis 11.00 Uhr)

M A T H E M A T I K

Bei der Abschlussprüfung zum Erwerb des mittleren Schulabschlusses im Fach Mathematik ist der elektronische Taschenrechner nach KMS vom 17. November 1997 Nr. IV/3-S 7402/3-4/153 945 zugelassen.

Eine für den Gebrauch an der Hauptschule genehmigte Formelsammlung ist zugelassen.

Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn sowohl der Lösungsweg als auch die Teilergebnisse aus dem Lösungsblatt ersichtlich sind.

Jeder Schüler muss e i n e von der Prüfungskommission ausgewählte A u f g a b e n g r u p p e bearbeiten.

Punkte

Aufgabengruppe I

1. a) Zur Geburt von Lena legt ihr Großvater 7 500 Euro zu einem Zinssatz von 4,1 % an. Wie hoch ist ihr Guthaben nach 18 Jahren, wenn der Zinssatz gleich bleibt und die Zinsen jeweils mitverzinst werden?

   b) Wie hoch müsste der gleichbleibende jährliche Zinssatz sein, damit das angelegte Kapital von 7 500 Euro nach 18 Jahren 16 000 Euro betragen würde?

   Hinweis: Runden Sie den Zinssatz auf eine Dezimalstelle.

   c) Wie lange müsste Lena die 7 500 Euro bei einem gleichbleibenden Zinssatz von 5,12 % anlegen, um ein Guthaben von 22 500 Euro anzusparen?

   Hinweis: Runden Sie das Ergebnis auf ganze Jahre. 4

2. Die Punkte B (–2|–4,5) und C (6|1,5) liegen auf der Geraden g_1.

   a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_1 rechnerisch.

   b) Eine Gerade g_2 steht senkrecht auf g_1 und verläuft durch den Punkt D (1|4).
   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_2 rechnerisch.

   Hinweis: Rechnen Sie mit g_1: $y = \frac{3}{4}x - 3$.

   c) Eine weitere Gerade g_3: $x = -2$ schneidet die Gerade g_2 im Punkt A.
   Ermitteln Sie die Koordinaten von A rechnerisch.

   Hinweis: Rechnen Sie mit g_2: $y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$.

   d) Zeichnen Sie die drei Geraden und die Punkte A (–2|8), B und Z (4|0) in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm ein.
   Bezeichnen Sie den Schnittpunkt von g_1 mit der y-Achse als Punkt B’, den Schnittpunkt von g_2 mit der y-Achse als Punkt A’.

   e) Das rechtwinklige Dreieck ZA’B’ geht durch zentrische Streckung aus dem Dreieck ZAB mit Z als Streckungszentrum hervor.
   Berechnen Sie den Streckungsfaktor k sowie den Flächeninhalt des Dreiecks ZA’B’ in cm².

   Hinweis: Geben Sie den Streckungsfaktor sowie den Flächeninhalt als gewöhnlichen Bruch an. 7

3. Geben Sie den Definitionsbereich folgender Bruchgleichung an und bestimmen Sie deren Lösungsmenge rechnerisch.

$$\frac{1}{2} = \frac{60}{x} - \frac{60}{x+10}$$ 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

4. Stiftung Warentest hat 25 Produkte getestet. Davon bekamen zwei die Note 1, fünf die Note 4 und drei die Note 5. Die restlichen Produkte schnitten mit den Noten 2 und 3 ab.

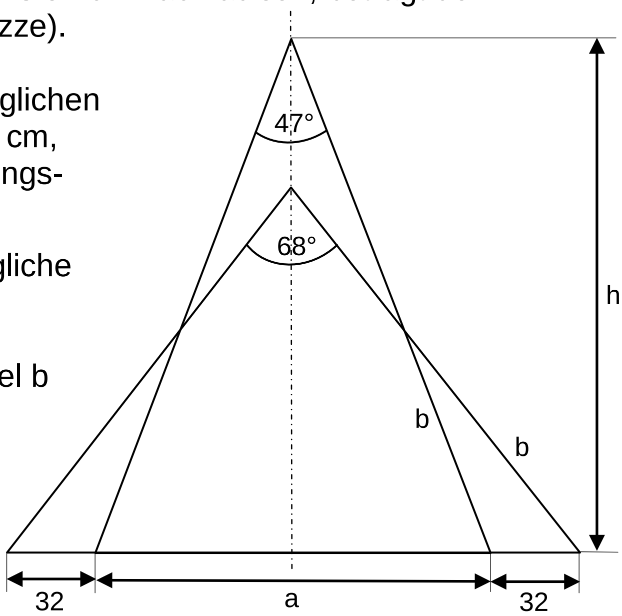
a) Wie viele Produkte wurden jeweils mit den Noten 2 und 3 bewertet, wenn der gesamte Testdurchschnitt bei 3,0 lag?

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Produkt mit 2 oder 3 bewertet wurde.

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eines der nicht mit 5 bewerteten Produkte die Note 4 erhalten hat?

d) Für ein Foto werden die neun besten Produkte nebeneinandergereiht. Geben Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen an. 6

5. Der Öffnungswinkel einer aufgestellten Stehleiter beträgt 47°. Verschiebt man beide Fußenden um jeweils 32 cm nach außen, beträgt der Öffnungswinkel 68° (siehe Skizze).



a) Berechnen Sie den ursprünglichen Abstand a der Fußenden in cm, z. B. mit Hilfe eines Gleichungssystems.

b) Berechnen Sie die ursprüngliche Höhe h in cm.

c) Berechnen Sie den Schenkel b der Leiter in cm?

Hinweis: Runden Sie alle Ergebnisse, auch Zwischenergebnisse, auf 2 Dezimalstellen. 5

6. Der Wert einer zweistelligen natürlichen Zahl mit der Quersumme 10 wird um 36 kleiner, wenn man ihre beiden Ziffern vertauscht. Notieren Sie hierzu die beiden richtigen Gleichungssysteme.

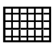
a) (I) $x + y = 10$
(II) $10x + y = 36$

b) (I) $x + y = 10$
(II) $10x + y = 10y + x + 36$

c) (I) $10x + y – 36 = 10y + x$
(II) $x = 10 – y$

d) (I) $y = 10 : x$
(II) $10x + y = 10y + x – 36$ 2

7. Ergänzen Sie die folgenden Gleichungen so, dass Binome entstehen.

a) (15a – )² =  – 480ab + 

b) ( + )² = 9x² + 30xy +  2

Hinweis: Nur vollständig richtig gelöste Binome werden bewertet.

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

8. Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt S_1 (–3|–4).

   a) Geben Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform an.

   b) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_1 mit der x-Achse (Nullstellen).

   c) Die Punkte A (–6|–3) und B (–1|–8) liegen auf einer nach unten geöffneten Normalparabel p_2. Stellen Sie die Funktionsgleichung von p_2 in der Normalform auf.

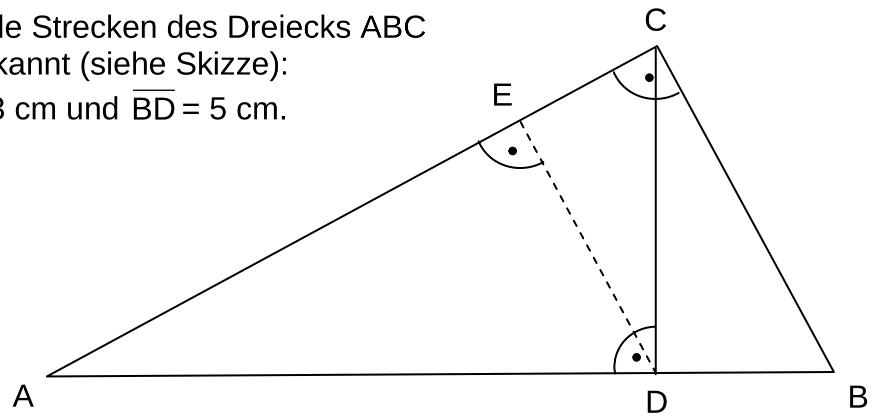
   d) Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 von p_2.

   Hinweis: Rechnen Sie mit p_2: $y = -x^2 - 8x - 15$

   e) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der beiden Normalparabeln.

   f) Zeichnen Sie die Graphen von p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. 8

9. Folgende Strecken des Dreiecks ABC sind bekannt (siehe Skizze):
   $\overline{BC} = 13$ cm und $\overline{BD} = 5$ cm.



   a) Berechnen Sie die Längen der Strecken [AB], [AC] und [AD] in cm.

   b) Das Lot vom Punkt D auf die Strecke [AC] schneidet diese im Punkt E (siehe Skizze).
   Berechnen Sie die Länge der Strecke [DE] in cm.

   Hinweis: Runden Sie – wenn nötig – alle Ergebnisse und Zwischenergebnisse auf eine Dezimalstelle. 4

10. Eine massive Bleikugel wird in einen mit Wasser gefüllten Zylinder, der einen Durchmesser von 6,13 cm hat, vollständig untergetaucht. Dabei steigt der Wasserstand um 1,5 cm.

   a) Berechnen Sie den Durchmesser der Bleikugel in cm.

   Hinweise: Rechnen Sie mit $\pi = 3{,}14$. Runden Sie Zwischenergebnisse und das Endergebnis auf zwei Dezimalstellen.

   b) Ermitteln Sie die Masse der Bleikugel in g (Dichte = 11,3 g/cm³).

   Hinweis: Runden Sie das Ergebnis auf ganze Gramm. 3

Aufgabengruppe II

Punkte

1. Die Gerade g_1 verläuft durch den Koordinatenursprung (0|0) und schneidet die zu ihr senkrecht stehende Gerade g_2 im Punkt A (–4|–2).

   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von g_1 und g_2 rechnerisch.

   b) Zeichnen Sie beide Geraden in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.

   c) Die Gerade g_2 schneidet die x-Achse im Punkt D. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts D rechnerisch.
   Hinweis: Rechnen Sie mit g_2: $y = -2x - 10$

   d) Die Gerade g_3 hat die Funktionsgleichung $y = -2x - 4$. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts B der Geraden g_1 und g_3.
   Hinweis: Rechnen Sie mit g_1: $y = 0{,}5x$

   e) Zeichnen Sie die Gerade g_3 in das bestehende Koordinatensystem. Lesen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts C von g_3 mit der x-Achse ab.

   f) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels δ beim Punkt D.
   Hinweis: Runden Sie auf ganze Grad. 8

2. Im Jahr 2005 lebten in der Volksrepublik China rund 1,306 Milliarden Menschen. In den Jahren davor nahm die Bevölkerung jeweils in einem Zeitraum von 5 Jahren um 4,4 % zu.

   a) Wie viele Einwohner hatte China im Jahr 1990?
   Hinweis: Runden Sie das Ergebnis auf Millionen.

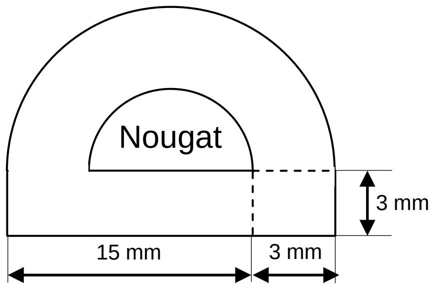
   b) Berechnen Sie das durchschnittliche jährliche Wachstum von 1990 bis 2005 in Prozent.
   Hinweis: Rechnen Sie mit einer Bevölkerungszahl von 1,148 Mrd. für das Jahr 1990. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen.

   c) Welche Einwohnerzahl hätte China im Jahr 2030, wenn die Bevölkerungszahl ab 2005 zehn Jahre lang um jährlich durchschnittlich 0,75 % und anschließend jährlich um 0,6 % steigen würde?
   Hinweis: Runden Sie das Ergebnis auf Millionen.

   d) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren China 2 Milliarden Einwohner hätte, wenn die Bevölkerungszahl ab 2005 um jährlich durchschnittlich 0,7 % steigen würde.
   Hinweis: Runden Sie das Ergebnis auf ganze Jahre. 5

3. Eine Schokoladenfabrik stellt 20 000 Pralinen her. Der halbkugelförmige Kern aus Nougat soll von allen Seiten mit einer 3 mm starken Schicht aus weißer Schokolade umhüllt sein (siehe Längsschnittskizze).

   Wie viele Liter weiße Schokolade wird benötigt?
   Hinweise: Rechnen Sie mit π = 3,14. Runden Sie das Endergebnis auf ganze Liter. 4



Fortsetzung nächste Seite

Punkte

4. Durch zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor k = 0,5 entsteht aus dem Dreieck ABC das Bilddreieck AB'C'.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
Schreiben Sie auf Ihr Lösungsblatt die Nummern der drei richtigen Aussagen.

Aussage
(1) Die Strecke AB ist doppelt so lang wie die Strecke AB'.
(2) Die Strecke AB ist halb so lang wie die Strecke AB'
(3) Der Flächeninhalt des Bilddreiecks beträgt ein Viertel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks.
(4) Der Flächeninhalt des Bilddreiecks ist halb so groß wie der Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks.
(5) Alle Winkel im Dreieck ABC sind halb so groß wie die entsprechenden Winkel im Bilddreieck AB'C'.
(6) Alle Winkel im Dreieck ABC sind genau so groß wie die entsprechenden Winkel im Bilddreieck AB'C'.

3

5. Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte P (2|11) und Q (–1|–4).
   a) Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform.
   b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt S_1 von p_1.
   c) Durch Spiegelung der Parabel p_1 an der Geraden mit der Funktionsgleichung y = 2 entsteht die Parabel p_2. Zeichnen Sie die Gerade und die beiden Parabeln in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm. Notieren Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S_2 von p_2.
   d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von p_2 in der Normalform.
   e) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts T von p_2 mit der y-Achse und die Koordinaten der Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_2 mit der x-Achse.
   Hinweis: Rechnen Sie mit p_2: $y = -x^2 - 4x + 5$.

8

6. Geben Sie den Definitionsbereich folgender Bruchgleichung an und bestimmen Sie deren Lösungsmenge rechnerisch.

$$\frac{2x-1}{(x-1)} + \frac{3x}{(x+2)} = \frac{2x^2+3x+16}{(x-1)(x+2)}$$

4

7. Der Umfang eines rechteckigen Blumenbeetes beträgt 48 m. Der Gärtner plant eine Verlängerung der längeren Seite um 5 m und der kürzeren um 1 m. Dadurch wird der Flächeninhalt des Beetes um 65 m² größer.
   Berechnen Sie die ursprünglichen Seitenlängen des Blumenbeetes.
   Hinweis: Eine Skizze hilft bei der Lösung.

4

Fortsetzung nächste Seite

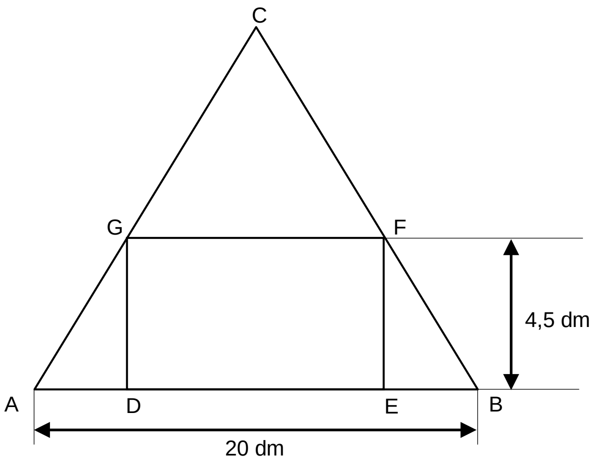
Punkte

8. Im gleichschenkligen Dreieck ABC (siehe Skizze) ist die Höhe h_c vom Eckpunkt C auf die Grundlinie AB 12 dm lang.

   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks DEFG.

   b) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkel γ beim Eckpunkt C. 3

   Hinweis: Runden Sie den Winkel auf ganze Grad.



9. Bei der Lösung der folgenden Gleichung wurde ein Fehler gemacht.
   In welcher Zeile steckt der Fehler?
   Berechnen Sie die Aufgabe ab dieser Zeile auf Ihrem Lösungsblatt.

Zeile 1: $x^{\frac{1}{3}} : (x^{(-6)})^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} : x^{14} \cdot \sqrt[4]{x^{12}} - 20 = 5$

Zeile 2: $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^3}{x^{-12} \cdot x^{14}} - 20 = 5$

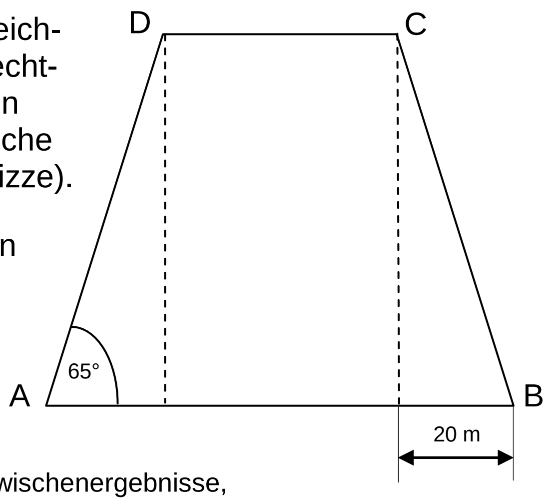
Zeile 3: $\dfrac{x^3}{x^2} = 25$

Zeile 4: $x = 25$ 2

10. Ein Grundstück hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Der mittlere, rechteckige Teil ist gepflastert und hat einen Flächeninhalt von 1 544 m². Das restliche Grundstück ist Rasenfläche (siehe Skizze).

    a) Berechnen Sie den Inhalt der beiden dreieckigen Rasenflächen.

    b) Berechnen Sie den Umfang des trapezförmigen Grundstücks.



Hinweis: Runden Sie alle Ergebnisse, auch Zwischenergebnisse, auf eine Dezimalstelle. 4