

Mathematik II

Haupttermin

Aufgabe A 1

A 1.0 Die Parabel p verläuft durch die Punkte $A(-2|3)$ und $C(6|3)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = 0,5x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,25x + 5,5$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

A 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,5x^2 - 2x - 3$ hat und zeichnen Sie die Parabel p sowie die Gerade g für $x \in [-3; 7]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leq x \leq 8$; $-6 \leq y \leq 8$.

4 P

A 1.2 Punkte $B_n(x | 0,5x^2 - 2x - 3)$ auf der Parabel p und Punkte $D_n(x | -0,25x + 5,5)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x und sind für $x \in]-2; 6[$ zusammen mit den Punkten A und C die Eckpunkte von Vierecken AB_nCD_n .
Zeichnen Sie das Viereck AB_1CD_1 für $x = -1$ und das Viereck AB_2CD_2 für $x = 3$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

2 P

A 1.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Vierecke AB_nCD_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n .

[Ergebnis: $A(x) = (-2x^2 + 7x + 34)$ FE]

4 P

A 1.4 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Belegungen von x die zugehörigen Vierecke einen Flächeninhalt von 38,5 FE haben. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

2 P

A 1.5 Die Vierecke AB_3CD_3 und AB_4CD_4 sind Drachenvierecke mit der Geraden AC als Symmetrieachse.

Berechnen Sie die x -Koordinaten der Punkte B_3 und B_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

4 P

A 1.6 Das Viereck AB_5CD_5 ist ebenfalls ein Drachenviereck.

Zeichnen Sie das Drachenviereck AB_5CD_5 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

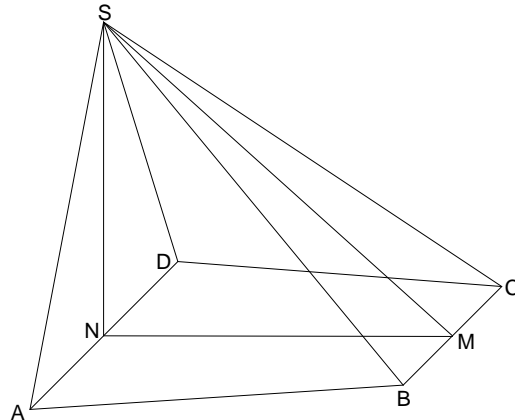
1 P

Mathematik II

Haupttermin

Aufgabe A 2

- A 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, deren Grundfläche das gleichschenklige Trapez ABCD mit $AD \parallel BC$ ist. Der Mittelpunkt der Kante [BC] ist der Punkt M, der Mittelpunkt der Kante [AD] ist der Punkt N. Die Spitze S der Pyramide ABCDS liegt senkrecht über dem Punkt N. Es gilt: $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$; $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$; $\overline{NM} = 10 \text{ cm}$; $\overline{NS} = 9 \text{ cm}$.



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

- A 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke [NM] auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann das Maß ε des Winkels SMN.
[Ergebnis: $\varepsilon = 41,99^\circ$]

3 P

- A 2.2 Punkte P_n liegen auf der Strecke [MS] mit $\overline{MP_n} = x \text{ cm}$ ($x \in \mathbb{R}^+$) und sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$. Punkte F_n sind die Fußpunkte der Pyramidenhöhen $[P_nF_n]$.

Zeichnen Sie für $x = 5$ die Pyramide $ABCDP_1$ und ihre Höhe $[P_1F_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch, für welche Werte von x Pyramiden $ABCDP_n$ existieren.

2 P

- A 2.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenflächen AP_nD in Abhängigkeit von x und weisen Sie sodann durch Rechnung nach, dass für keinen Wert von x der Flächeninhalt der Seitenflächen AP_nD und BCP_n gleich ist.

[Teilergebnis: $\overline{NP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 14,87x + 100} \text{ cm}$]

5 P

- A 2.4 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von x gilt:

$$V(x) = 22,33x \text{ cm}^3.$$

3 P

- A 2.5 In der Pyramide $ABCDP_2$ gilt: $\angle SMNP_2 = 60^\circ$.

Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x .

Ermitteln Sie sodann rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $ABCDP_2$ am Volumen der Pyramide ABCDS.

4 P

Mathematik II

Haupttermin

Aufgabe B 1

B 1.0 Die Parabel p verläuft durch die Punkte $A(-2|-3)$ und $C(5|0,5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + 2x + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $c \in \mathbb{R}$.

B 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,5x^2 + 2x + 3$ hat und zeichnen Sie die Parabel p für $x \in [-3; 7]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4 \leq x \leq 8$; $-8 \leq y \leq 6$.

3 P

B 1.2 Punkte $D_n(x | -0,5x^2 + 2x + 3)$ auf der Parabel p sind für $x \in]-2; 5[$ zusammen mit den Punkten A und C und Punkten B_n die Eckpunkte von Parallelogrammen AB_nCD_n .

Zeichnen Sie das Parallelogramm AB_1CD_1 für $x = -0,5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und überprüfen Sie sodann rechnerisch, ob das Parallelogramm AB_1CD_1 ein Rechteck ist.

4 P

B 1.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Parallelogramme AB_nCD_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte D_n .

[Ergebnis: $A(x) = (-3,5x^2 + 10,5x + 35)$ FE]

3 P

B 1.4 Unter den Parallelogrammen AB_nCD_n besitzt das Parallelogramm AB_0CD_0 den maximalen Flächeninhalt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_0 .

2 P

B 1.5 Im Parallelogramm AB_2CD_2 hat der Winkel CAD_2 das Maß 25° .

Zeichnen Sie das Parallelogramm AB_2CD_2 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und berechnen Sie sodann die x -Koordinate des Punktes D_2 . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

[Teilergebnis: $m_{AD_2} = 1,26$]

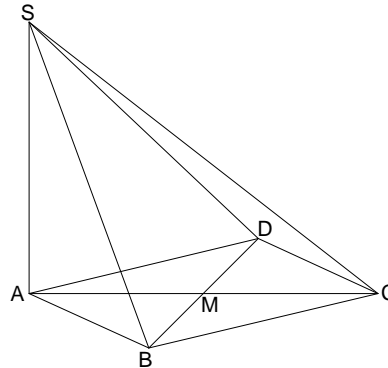
5 P

Mathematik II

Haupttermin

Aufgabe B 2

- B 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, deren Grundfläche die Raute ABCD mit den Diagonalen [AC] und [BD] ist. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen ist der Punkt M. Die Spitze S der Pyramide ABCDS liegt senkrecht über dem Punkt A. Es gilt: $\overline{AC} = 9 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 8 \text{ cm}$; $\overline{AS} = 7 \text{ cm}$.



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

- B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Diagonale [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [SC] und das Maß φ des Winkels SCA.

[Ergebnisse: $\overline{SC} = 11,40 \text{ cm}$; $\varphi = 37,87^\circ$]

4 P

- B 2.2 Punkte $Z_n \in [SC]$ mit $\overline{Z_n C} = x \text{ cm}$ ($x < 11,40$; $x \in \mathbb{R}^+$) sind die Spitzen von Pyramiden $BCDZ_n$.

Zeichnen Sie die Pyramide $BCDZ_1$ für $x = 2$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann das Maß ε des Winkels CMZ_1 .

3 P

- B 2.3 Für die Pyramide $BCDZ_2$ gilt: $MZ_2 \perp AC$.

Zeichnen Sie die Pyramide $BCDZ_2$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Begründen Sie sodann, dass für die Pyramide $BCDZ_2$ gilt: $\overline{SZ_2} = \overline{Z_2 C}$.

3 P

- B 2.4 In der Pyramide $BCDZ_3$ gilt: $\angle SCMZ_3 = 110^\circ$.

Zeichnen Sie die Pyramide $BCDZ_3$ und ihre Höhe $[Z_3 F]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[Z_3 C]$.

[Ergebnis: $\overline{Z_3 C} = 7,95 \text{ cm}$]

3 P

- B 2.5 Ermitteln Sie durch Rechnung den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $BCDZ_3$ am Volumen der Pyramide ABCDS.

4 P

Mathematik II

Haupttermin

Aufgabe C 1

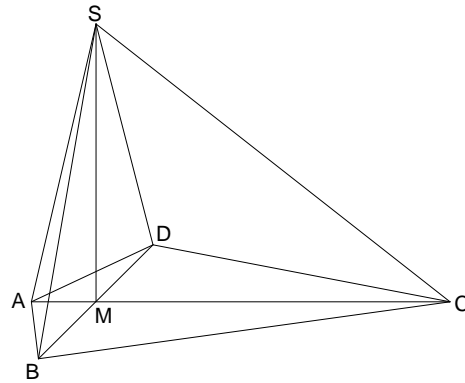
- C 1.0 Gegeben sind die Parabel p_1 mit der Gleichung $y = -0,3x^2 + 2,1x + 1,2$ und die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 mit der Gleichung $y = -x^2 + 8x - 6$. ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.)
- C 1.1 Zeigen Sie, dass die Parabel p_1 den Scheitel $S_1(3,5 \mid 4,875)$ hat.
Erstellen Sie sodann für die Parabel p_1 eine Wertetabelle für $x \in [0; 7]$ mit $\Delta x = 1$ und zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 9$; $-3 \leq y \leq 11$. 4 P
- C 1.2 Punkte $A_n(x \mid -0,3x^2 + 2,1x + 1,2)$ auf der Parabel p_1 und Punkte $C_n(x \mid -x^2 + 8x - 6)$ auf der Parabel p_2 sind zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_nB_nC_nD_n$ mit $\overline{B_nD_n} = 2 \text{ LE}$. Die Punkte A_n und C_n haben dieselbe Abszisse x und es gilt: $y_{A_n} < y_{C_n}$.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1B_1C_1D_1$ für $x = 2$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. 2 P
- C 1.3 Ermitteln Sie durch Rechnung, für welche Belegungen von x es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. 3 P
- C 1.4 Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Gerade B_2C_2 eine Tangente an die Parabel p_2 ist.
[Teilergebnis: $B_2(6 \mid 6)$] 4 P
- C 1.5 Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Länge der Diagonalen $[A_nC_n]$ der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n wie folgt darstellen lässt:
 $\overline{A_nC_n}(x) = (-0,7x^2 + 5,9x - 7,2) \text{ LE}$. 1 P
- C 1.6 Unter den Rauten $A_nB_nC_nD_n$ hat die Raute $A_0B_0C_0D_0$ den maximalen Flächeninhalt. Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x und den Flächeninhalt der Raute $A_0B_0C_0D_0$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. 3 P

Mathematik II

Haupttermin

Aufgabe C 2

- C 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCDS, deren Grundfläche das Drachenviereck ABCD mit den Diagonalen [AC] und [BD] ist. Die beiden Diagonalen schneiden sich im Punkt M mit $\overline{AM} = 2 \text{ cm}$. Die Spitze S der Pyramide ABCDS liegt senkrecht über dem Punkt M. Es gilt: $\overline{AC} = 13 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$; $\overline{SC} = 14 \text{ cm}$.



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

- C 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Diagonale [AC] auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann das Maß γ des Winkels SCA und die Länge der Pyramidenhöhe [MS].

[Ergebnisse: $\gamma = 38,21^\circ$; $\overline{MS} = 8,66 \text{ cm}$]

4 P

- C 2.2 Punkte $E_n \in [SA]$, $F_n \in [SB]$, $G_n \in [SC]$ und $H_n \in [SD]$ sind die Eckpunkte von Drachenvierecken $E_n F_n G_n H_n$. Die Diagonalen $[E_n G_n]$ und $[F_n H_n]$ der Drachenvierecke $E_n F_n G_n H_n$ schneiden sich in den Punkten P_n und verlaufen jeweils parallel zu den Diagonalen [AC] und [BD] des Drachenvierecks ABCD.

Es gilt: $\overline{SG_n} = x \text{ cm}$ mit $x < 14$; $x \in \mathbb{R}^+$.

Die Punkte E_n , F_n , G_n und H_n und der Punkt $R \in [AC]$ mit $\overline{RC} = 8 \text{ cm}$ legen Pyramiden $E_n F_n G_n H_n R$ fest. Punkte N_n auf den Geraden $E_n G_n$ sind die Fußpunkte der Pyramidenhöhen $[N_n R]$.

Zeichnen Sie für $x = 7,5$ die Pyramide $E_1 F_1 G_1 H_1 R$ und ihre Höhe $[N_1 R]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

2 P

- C 2.3 Berechnen Sie die Länge der Seitenkante $[RG_1]$ und das Maß ε des Winkels CRG_1 .
[Ergebnis: $\varepsilon = 54,31^\circ$]

4 P

- C 2.4 Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide $E_1 F_1 G_1 H_1 R$ durch Rechnung.
[Teilergebnis: $\overline{N_1 R} = 4,02 \text{ cm}$]

5 P

- C 2.5 Das Volumen der Pyramide $E_2 F_2 G_2 H_2 R$ ist halb so groß wie das Volumen der Pyramide $E_2 F_2 G_2 H_2 S$. Begründen Sie, dass die Höhe der Pyramide $E_2 F_2 G_2 H_2 R$ folglich halb so lang wie die Höhe der Pyramide $E_2 F_2 G_2 H_2 S$ ist.

2 P