Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2008

| | |
|---|---|
| Prüfungsfach: | Mathematik<br>(nichttechnische Ausbildungsrichtung) |
| Prüfungstag: | Donnerstag, 26. Juni 2008 |
| Prüfungsdauer: | 09:00 – 12:00 Uhr |
| Hilfsmittel: | Elektronischer, nichtprogrammierbarer Taschenrechner,<br>zugelassene Formelsammlung |

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

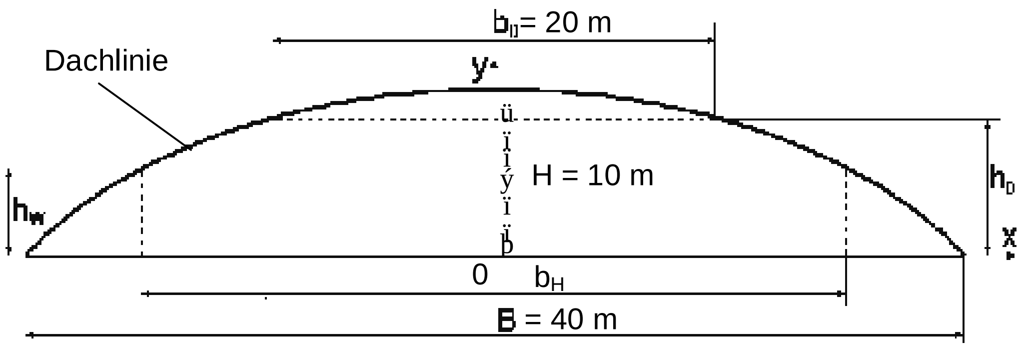
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

| Analysis: Aufgabe 1 | | BE |
|---|---|---|
| 1.0 | Die Funktion f mit $x \in \mathbf{R}$ ist eine Polynomfunktion 3-ten Grades. Der Graph G(f) der Funktion f besitzt die beiden Extremalpunkte (0; –4) und (2; 0). | |
| 1.1 | Berechnen Sie den Funktionsterm f(x).<br>[Ergebnis: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ ] | 6 |
| 1.2 | Bestimmen Sie durch Rechnung die Art der Extrempunkte. | 2 |
| 1.3 | Ermitteln Sie die Nullstellen mit ihren jeweiligen Vielfachheiten. | 4 |
| 1.4 | Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes sowie die Gleichung der Wendetangente. | 5 |
| 1.5 | Zeichnen Sie G(f) und die Wendetangente im Bereich $-1 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.<br>(Maßstab auf beiden Achsen: 1LE = 1 cm) | 4 |
| 1.6 | Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die von den beiden senkrechten Geraden durch die Extremalpunkte, sowie G(f) und der Geraden mit der Gleichung $y = 3x - 5$ begrenzt wird. Schraffieren Sie diese Flächen in der graphischen Darstellung der Teilaufgabe 1.5. | 4 |
| | Summe | 25 |

| Analysis: Aufgabe 2 | | BE |
|---|---|---|
| 2.0 | Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k$ durch $f_k(x)=\frac{1}{k}x^4-2x$ mit $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ und $D(f_k)=\mathbf{R}$. | |
| 2.1 | Berechnen Sie den Parameter k so, dass die Funktion $f_k$ die Nullstelle $x_0=2$ besitzt. | 2 |
| | Für die folgenden Teilaufgaben ist die Funktion $f_4$ mit dem Term $f_4(x)=\frac{1}{4}x^4-2x$ zu verwenden. Der Graph der Funktion $f_4$ wird mit $G(f_4)$ bezeichnet. | |
| 2.2 | Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f_4$. | 3 |
| 2.3 | Bestimmen Sie Art und Lage des einzigen Extremalpunktes des Graphen $G(f_4)$. | 4 |
| 2.4 | Zeigen Sie, dass gilt: $f_4''(0)=0$. Begründen Sie, dass bei $x_1=0$ trotzdem keine Wendestelle der Funktion $f_4$ vorliegt. | 3 |
| 2.5 | Zeichnen Sie $G(f_4)$ im Bereich $-1{,}5\le x\le 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.<br>Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2cm | 4 |
| 2.6 | Eine ganzrationale Funktion p zweiten Grades mit der Definitionsmenge $\mathbf{R}$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Der Graph der Funktion heißt G(p). Der Scheitel des Graphen G(p) hat die Koordinaten S(1; –1). Ermitteln Sie den Funktionsterm der Funktion p.<br>[Ergebnis: $p(x)=x^2-2x$] | 4 |
| 2.7 | Zeigen Sie rechnerisch, dass sich $G(f_4)$ und G(p) im Koordinatenursprung berühren. | 3 |
| 2.8 | Zeichnen Sie G(p) in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 2.5 ein. | 2 |
| | Summe | 25 |

<table>
<tr><td colspan="2">Analysis: Aufgabe 3</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>3.0</td><td>Die Dachlinie einer Halle hat einen parabelförmigen Verlauf. Die Halle ist 40 m (B = 40 m) breit und hat eine maximale Höhe von 10 m (H = 10 m). Für die folgenden Rechnungen wird der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in die Hallenmitte auf Bodenhöhe gelegt (siehe Skizze!). Bei den Berechnungen wird auf die Mitführung von Einheiten verzichtet.<br>

</td><td></td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Ermitteln Sie den Funktionsterm h(x) der Parabel h, die der Dachlinie entspricht. Entnehmen Sie die hierfür notwendigen Maßzahlen der Skizze.<br>[ Ergebnis: $h(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 10$ ]</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Die waagrechte Hallendecke hat eine Breite von $b_D = 20$ m.<br>Berechnen Sie die Deckenhöhe $h_D$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Die Höhe $h_W$ der Seitenwände in der Halle beträgt 3,60 m.<br>Ermitteln Sie die nutzbare Hallenbreite $b_H$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Die Dachlinie und der Boden begrenzen die vordere Außenwand der Halle, die als Werbefläche genutzt wird. Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3.5.0</td><td>Leichter zu vermarkten ist eine rechteckige Werbefläche auf der vorderen Außenwand.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5.1</td><td>Bestimmen Sie den Term $A_R(x)$ dieser Werbefläche, die symmetrisch zur y-Achse liegt und vom Boden bis zum Dach reicht.<br>[ Ergebnis: $A_R(x) = -\frac{1}{20}x^3 + 20x$ ]</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.5.2</td><td>Berechnen Sie Breite und Höhe dieser Werbefläche so, dass die Fläche maximal wird. Geben Sie auch diesen maximalen Flächeninhalt an.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3.5.3</td><td>Ein Kunde wünscht eine möglichst große quadratische Werbefläche.<br>Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Quadrates.</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>25</td></tr>
</table>

| Analysis: Aufgabe 4 | | BE |
|---|---|---|
| 4.0 | Der zeitliche Verlauf des Pegelstandes eines Flusses während eines Hochwassers wird durch die Funktion P näherungsweise beschrieben. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird vom Fluss die Meldegrenze $P_0$ überschritten. Ab diesem Zeitpunkt gibt der Funktionsterm $P(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$ mit $t \in D_P = [0;6]$ den Hochwasserstand des Flusses wieder.<br>Hinweise: $P(t) \triangleq$ Pegelstand über Normal in Meter<br>$t \triangleq$ Zeit in Tagen<br>Geben Sie alle Ergebnisse als Dezimalzahlen auf eine Nachkommastelle gerundet an. Bei den folgenden Aufgaben wird auf die Mitführung von Einheiten bei den Rechnungen verzichtet. | |
| 4.1 | Berechnen Sie die Meldegrenze $P_0$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. | 1 |
| 4.2 | Ermitteln Sie den Pegelstand $P_{0,5}$ nach einem halben Tag (t = 0,5).<br>Ein Beobachter vermutet, dass der Pegelstand in der zweiten Hälfte des ersten Tages um den gleichen Wert ansteigt wie im ersten halben Tag. Berechnen Sie den Pegelstand $P_1^*$, der sich unter dieser Voraussetzung am Ende des ersten Tages einstellen würde. | 3 |
| 4.3 | Berechnen Sie den tatsächlichen Pegelstand $P_1$ und erklären Sie den Unterschied zu dem Wert $P_1^*$. | 2 |
| 4.4 | Berechnen Sie Zeitpunkt und Höhe des maximalen Pegelstandes. | 6 |
| 4.5 | Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion P. | 3 |
| 4.6 | Zeichnen Sie den Graph der Funktion P im Intervall [0; 6] und kennzeichnen Sie die Punkte $P_1^*$ und $P_1$.<br>Maßstab der waagrechten Zeitachse: 1 Tag = 1 cm<br>Maßstab der senkrechten Pegelstandsachse: 1 m = 1 cm | 4 |
| 4.7 | Ein Pegelstand von 3 m über Normal gilt als Alarmgrenze. Berechnen Sie, zu welchen Zeitpunkten Alarm ausgelöst bzw. wieder aufgehoben wird. | 5 |
| 4.8 | Geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt der Pegelstand am stärksten abnimmt. | 1 |
| | Summe | 25 |

| Analytische Geometrie | | BE |
|---|---|---|
| 5.0 | In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(3; –3; –2), B(2; –2; 5) und C(–1; 3; 1) und die Vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ gegeben. | |
| 5.1 | Geben Sie den Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ an und zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind. | 3 |
| 5.2 | Berechnen Sie das Maß $\alpha$ des Winkels, den die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einschließen. | 3 |
| 5.3.1 | Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{AP}$ mit P(1,2; –0,4; 0,6) als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. | 5 |
| 5.3.2 | Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten P und A. | 2 |
| 5.4 | Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC. | 3 |
| 5.5 | Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $D_k(k + 6; k + 8; k)$ mit den Punkten A, B und C das Parallelogramm ABCD (mit $\overrightarrow{AD}$ parallel $\overrightarrow{BC}$) bildet.<br>Geben Sie auch die Koordinaten von D an.<br>[Teilergebnis: $k = -6$] | 4 |
| 5.6 | Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Parallelogramms ABCD.<br>[Ergebnis: M(1; 0; –0,5)] | 2 |
| 5.7 | Der Vektor $\overrightarrow{MS}$ steht senkrecht auf dem Parallelogramm ABCD. Die Maßzahl seiner Länge entspricht der Maßzahl der Fläche des Parallelogramms ABCD. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S (2 Lösungen). | 3 |
| | Summe | 25 |