Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2009

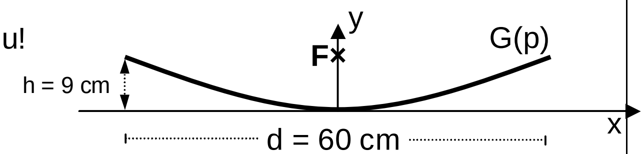
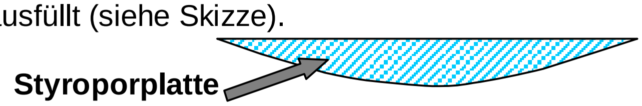
Prüfungsfach:	Mathematik (nichttechnische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 25. Juni 2009
Prüfungsdauer:	09:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

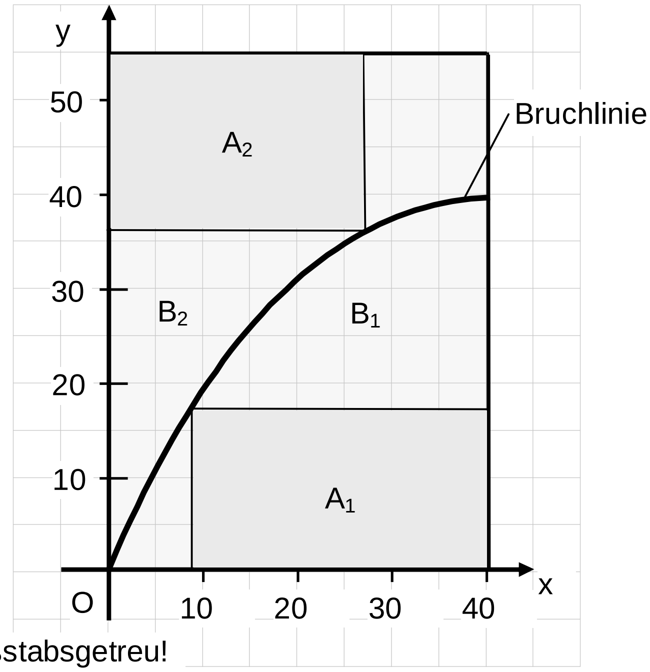
Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.
	Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.
	Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.
	Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

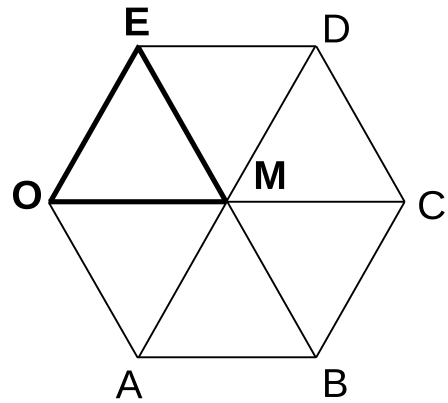
Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Der Graph G(f) der ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit $x \in \mathbb{R}$ besitzt den Tiefpunkt T(5; 0) und den Wendepunkt W(3; 2).	
1.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm von f. [mögliches Ergebnis: f(x) = $\frac{1}{8}(x^3 - 9x^2 + 15x + 25)$]	7
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen von f mit ihren Vielfachheiten.	3
1.3	Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts von G(f).	3
1.4	Zeichnen Sie G(f) im Bereich $-2 \le x \le 7$ in ein kartesisches Koordinaten-system. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm	4
1.5	Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente t_w und zeichnen Sie diese in die Zeichnung aus 1.4 ein. [Ergebnis: $t_w(x) = -1{,}5x + 6{,}5$]	4
1.6	Der Graph G(f), die Wendetangente t_w und die y-Achse schließen eine Fläche ein. Schraffieren Sie diese Fläche in der Zeichnung aus Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl ihres Flächeninhalts.	4
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = -0{,}01x^4 + 0{,}03x^3 + 0{,}15x^2 + d \cdot x + 0{,}06$ mit $x; d \in \mathbf{R}$. Der zugehörige Graph wird mit G(h) bezeichnet.	
2.1	Ermitteln Sie d so, dass die Tangente an G(h) im Punkt P (1; y_P) parallel zur Geraden $y = 0{,}52x$ verläuft.	3
	Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $h(x) = -0{,}01x^4 + 0{,}03x^3 + 0{,}15x^2 + 0{,}17x + 0{,}06$. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.	
2.2	Zeigen Sie, dass h die Nullstellen $x_1 = 6$ und $x_2 = -1$ besitzt.	2
2.3	Berechnen Sie die Wendepunkte W_1 und W_2 sowie die Gleichungen der beiden Wendetangenten von G(h). [Teilergebnis: $x_{W_1} = -1$; $x_{W_2} = 2{,}5$; $t_{W_1}: y = 0$; $t_{W_2}: y = 0{,}86x - 0{,}64$]	8
2.4	Berechnen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G(h) und geben Sie Art und Lage der Punkte mit waagerechter Tangente an.	7
2.5	Übertragen Sie die folgende Wertetabelle auf Ihr Blatt und vervollständigen Sie sie unter Verwendung der Ergebnisse der vorhergehenden Teilaufgaben. (Wertetabelle siehe unten) Zeichnen Sie den Graphen G(h) und die beiden Wendetangenten für $-2 \le x \le 6$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Maßstab auf x - Achse: 1 LE = 1 cm; Maßstab auf y - Achse: 1 LE = 2 cm	5
	Summe	25

x	–2	–1	0	1	2,5	3,5	4,25	5	6
h(x)	–0,08					2,28		2,16	

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Eine Parabolantenne („Satellitenschüssel“) besitzt den Durchmesser $d = 60$ cm und die Randhöhe $h = 9$ cm. Ihr Querschnitt verläuft entlang dem Graphen einer ganzrationalen Funktion p zweiten Grades. Der Graph G(p) der Funktion p ist achsensymmetrisch zum Koordinatensystem und verläuft durch den Ursprung. Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet; die Koordinaten der Punkte im zugrunde gelegten Koordinatensystem können aber als Maßzahlen in Zentimeter gedeutet werden (siehe Skizze). Zeichnung nicht maßstabsgetreu! 	
3.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). [Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{100}x^2$]	4
3.2	Berechnen Sie p(10) und p(20) und zeichnen Sie G(p) in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit $-30 \le x \le 30$ und $0 \le y \le 60$. Maßstab auf beiden Achsen: 10 LE = 1 cm	3
3.3	Eine Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ besitzt den Brennpunkt $F(0; \frac{1}{4a})$ (siehe Skizze bei 3.0). Berechnen Sie die y-Koordinate des Brennpunkts der in 3.0 beschriebenen Parabolantenne und tragen Sie F in die Zeichnung der Teilaufgabe 3.2 ein.	2
3.4	Ein Satellit sendet elektromagnetische Strahlen. Ein Strahl s verläuft entlang der Geraden s: $x = 20$, wird an der Innenseite der Parabolantenne im Punkt S reflektiert und geht dann durch F. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g durch S und F und zeichnen Sie s und g in die Zeichnung der Teilaufgabe 3.2 ein.	4
3.5	Berechnen Sie die Gleichungen der Tangente t an G(p) und der dazu senkrechten Geraden n im Punkt S. Zeichnen Sie beide Geraden in die Zeichnung der Teilaufgabe 3.2 ein.	6
3.6	Der einfallende und der reflektierte Strahl bilden einen Winkel von ca. 43,6°. Welche besondere Lage hat die Gerade n zu diesen Strahlen?	2
3.7	Als Teil der Transportverpackung soll eine sehr dünne Styroporplatte verwendet werden, die senkrecht-stehend quer durch die Mitte der Parabolantenne verläuft und diese passgenau ausfüllt (siehe Skizze).  Querschnitt nicht maßstabsgetreu Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche dieser Platte.	4
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Eine Glasscheibe mit einer Breite von 40 cm und einer Höhe von 55 cm ist gebrochen. Die Bruchlinie hat die Form einer Parabel p und teilt die ursprünglich rechteckige Glasscheibe in die Bruchstücke B_1 und B_2. Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet; die Koordinaten der Punkte im zugrunde gelegten Koordinatensystem können aber als Maßzahlen in Zentimeter gedeutet werden (siehe Skizze).  Zeichnung nicht maßstabsgetreu!	
4.1	Bestimmen Sie für $0 \le x \le 40$ die Gleichung der Parabel p, die durch $P_1(0;\,0)$ und den Scheitel $P_2(40;\,40)$ verläuft. [Ergebnis: $p(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 2x$]	4
4.2	Berechnen Sie die Maßzahlen der Flächen B_1 und B_2.	5
4.3.0	Glaser Felix wettet mit seiner Kollegin Christine, dass aus dem flächengrößeren Bruchstück auch ein größeres rechteckiges Stück parallel zu den Koordinatenachsen ausgeschnitten werden kann. Das aus der Fläche B_1 ausgeschnittene Rechteck wird mit A_1, das aus B_2 mit A_2 bezeichnet (siehe Skizze). Christine hält dagegen. Sie hat eine maximale Flächenmaßzahl $A_1 = 616$ ermittelt.	
4.3.1	Stellen Sie in Abhängigkeit von x die Flächenmaßzahl $A_2(x)$ dar. [Ergebnis: $A_2(x) = \frac{1}{40}x^3 - 2x^2 + 55x$]	3
4.3.2	Untersuchen Sie, ob die Flächenmaßzahl $A_2(x)$ einen absolut größten Wert besitzt. Entscheiden Sie, wer die Wette gewinnt.	5
4.3.3	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion A_2 für $0 \le x \le 40$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit einem geeigneten Maßstab.	4
4.3.4	Christine möchte aus dem Bruchstück B_1 eine möglichst große quadratische Fläche ausschneiden. Berechnen Sie die Kantenlänge und den Flächeninhalt dieser quadratischen Scheibe.	4
	Summe	25

Analytische Geometrie		BE
5.0	Ein Freizeitzelt nach Indianer-Bauweise besitzt als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck OABCDE mit den Punkten O(0; 0; 0), M(2; 0; 0) und E(1; $\sqrt{3}$; 0). Die Koordinaten der Punkte sind Maßzahlen mit der Einheit Meter. In allen Rechnungen kann auf die Angabe der Einheiten verzichtet werden. 	
5.1	Zeigen Sie, dass das Dreieck OME drei gleich lange Seiten hat.	5
5.2	Zeigen Sie: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{OE}$.	3
5.3	Geben Sie die Koordinaten der Punkte A und D an.	3
5.4	Berechnen Sie die Maßzahl der Grundfläche des Zeltes. [Ergebnis: A = $6\sqrt{3}$].	3
5.5	Die Zeltspitze hat ursprünglich die Koordinaten S(2; 0; 3,7). Bei einem Sturm wird das Zelt verformt. An der Grundfläche OABCDE hat sich nichts geändert, aber die Zeltspitze hat nun die Koordinaten $S'(1{,}9;\ 1{,}7;\ 3{,}5)$. Berechnen Sie die Maßzahlen der Zeltvolumina V vor dem Sturm und V' nach dem Sturm.	4
5.6	Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle SMS'$ und deuten Sie das Ergebnis im gegebenen Sachverhalt.	4
5.7	Das schiefe Zelt wird nun provisorisch stabilisiert, indem ein Seil von der Spitze S' zu einem benachbarten Baum gespannt wird. Der Vektor $\overrightarrow{S'P} = \begin{pmatrix} 2k \\ 8k \\ 5k \end{pmatrix}$ verläuft von der Zeltspitze S' zum Befestigungspunkt P am Baum. Berechnen Sie k mit $k > 0 \wedge k \in \mathbb{R}$, wenn der Abstand zwischen den Punkten S' und P 11 Meter beträgt.	3
	Summe	25