Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2010

Prüfungsfach: Mathematik
(nichttechnische Ausbildungsrichtung)

Prüfungstag: Donnerstag, 24. Juni 2010

Prüfungsdauer: 09:00 – 12:00 Uhr

Hilfsmittel: Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

Hinweise: Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

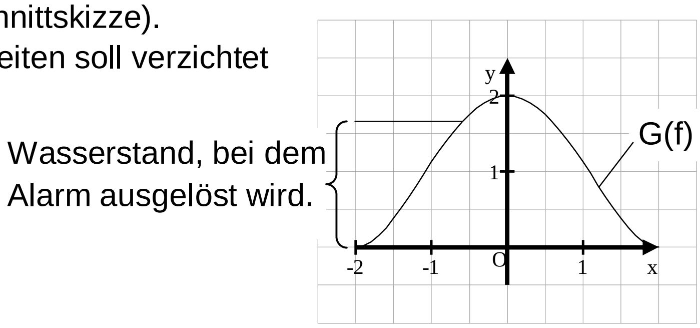
Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

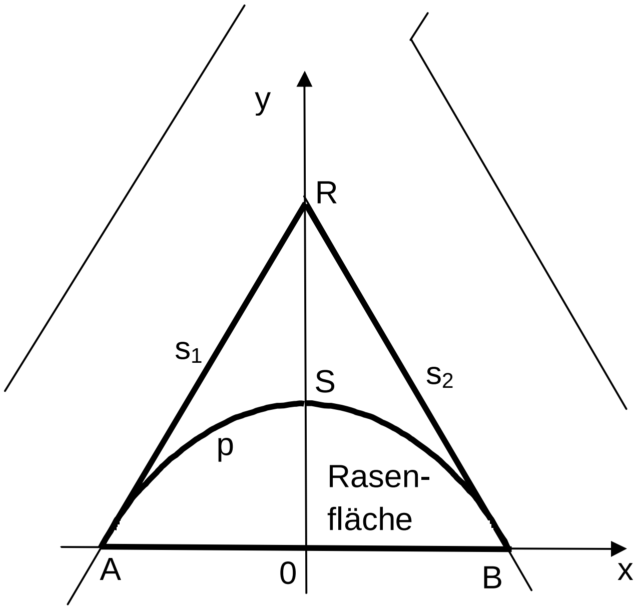
Auf Seite 7 ist der Name einzutragen.

Am Ende der Bearbeitungszeit ist die Seite 7 wieder abzugeben.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 5x$ mit $D(f) = \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G(f).	
1.1	Zeigen Sie, dass der Punkt $Ter(2;\, y_{Ter})$ Terrassenpunkt von G(f) ist.	4
1.2	Bestimmen Sie Art und Koordinaten des Extremalpunktes von G(f).	4
1.3	Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G(f). [Teilergebnis: $W(4;\, y_W)$]	4
1.4	Zeichnen Sie G(f) im Intervall von $x \in [-1;\, 7]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm	4
1.5	Die beiden Wendepunkte von G(f) liegen auf einer nach oben geöffneten Normalparabel p. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Parabel p und zeichnen Sie die Parabel in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4 ein. [Ergebnis: $p(x) = x^2 - 5{,}5x + 10$]	5
1.6	Die Graphen von f und p schließen eine endliche Fläche ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.	4
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben sind die Funktionen p_a mit $p_a(x) = -x^2 + a;\ a \in \mathbf{R}$ und q mit $q(x) = (x-2)^2$, wobei $D(p_a) = D(q) = \mathbf{R}$ gilt.	
2.1	Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte der Graphen von p_a und q in Abhängigkeit von a. Führen Sie hierzu eine Fallunterscheidung bezüglich a durch.	6
2.2	Bestimmen Sie den Wert von a so, dass gilt: $\int_{-2}^{1} p_a(x)\,dx = 24$	4
2.3.0	Für die folgenden Teilaufgaben gilt a = 9. Es ergibt sich p_9 mit $p_9(x) = -x^2 + 9$. Die Geraden x = b und x = – b mit $-3 < b < 3$ schneiden die x-Achse und den Graphen von p_9 in insgesamt vier Punkten. Die Punkte bilden ein Rechteck ABCD.	
2.3.1	Zeichnen Sie den Graphen von p_9 und das Rechteck für b = 1,5 in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm	3
2.3.2	Berechnen Sie den Wert von b so, dass das Rechteck ABCD den größten Umfang besitzt. Zeichnen Sie das Rechteck mit maximalem Umfang in das Diagramm der Teilaufgabe 2.3.1 ein. Ermitteln Sie auch die Maßzahl des maximalen Umfangs.	6
2.3.3	Bestimmen Sie b so, dass das Rechteck ABCD den größten Flächeninhalt besitzt und ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der größten Fläche.	6
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Zum Schutz vor Überflutungen soll eine geradlinig verlaufende Deichanlage von 4 Meter Breite und 2 Meter Höhe errichtet werden. Der Querschnitt des Deichs ist y – achsensymmetrisch und verläuft entlang des Graphen einer Funktion f vierten Grades, der die x-Achse an der Stelle x = 2 berührt (siehe Querschnittskizze). Auf die Mitführung von Einheiten soll verzichtet werden.  	
3.1	Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f mit D(f) = [–2; 2]. $[\text{Ergebnis}: f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2]$	5
3.2	Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an denen die Deichwand maximale Steigung besitzt und geben Sie die zugehörige Steigung an. (Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen!)	5
3.3	Die Deichwand muss besonders gegen Abrutschen verstärkt werden, wenn die Wandneigung den Wert von 1,5 übersteigt. Berechnen Sie das Intervall der x-Werte der Deichwand, zwischen denen eine besondere Verstärkung nötig ist. (Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen!)	6
3.4	Berechnen Sie die Volumenmaßzahl eines 100 Meter langen Deiches.	4
3.5	Alarm wird bei einem Wasserstand von 1,62 m über der x-Achse ausgelöst. Ermitteln Sie für einen Wasserstand von 1,62 m die x-Koordinaten des Punktes, an der die Wasseroberfläche auf den Deich trifft.	5
	Summe	25

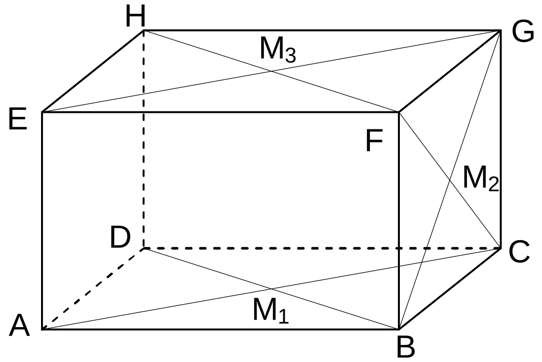
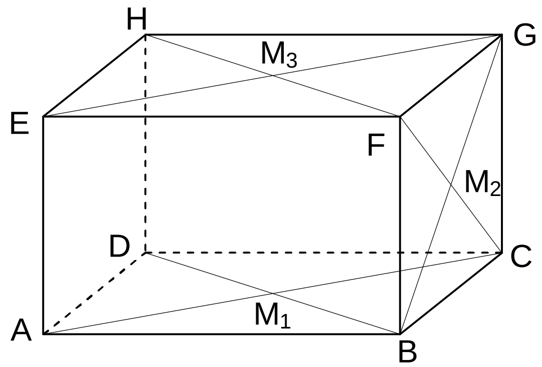
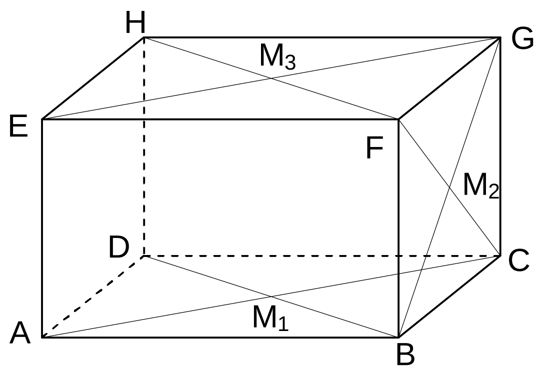
Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Im Bereich einer ebenen Straßeneinmündung soll ein Teil der Fläche als Rasenfläche angelegt und der Rest gepflastert werden. Die zu pflasternde Fläche ist durch die beiden Straßenränder s_1 und s_2 und durch eine Parabel p, die durch die Punkte A(–4; 0), B(4; 0) und den Scheitel S(0; 3) verläuft, begrenzt (siehe Skizze). Die Koordinaten der Punkte besitzen die Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten soll in den nachfolgenden Aufgaben verzichtet werden. 	
4.1	Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Parabel p. [mögliches Ergebnis: $p(x) = -\frac{3}{16}(x^2 - 16)$]	3
4.2	Die Straßenränder s_1 und s_2 verlaufen in den Punkten A und B tangential zur Parabel. Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden s_1 und s_2, sowie die Koordinaten des Punktes R, in dem sie sich treffen. [Teilergebnis: $s_1(x) = 1{,}5x + 6$]	5
4.3	Ermitteln Sie die Maßzahl der zu pflasternden Fläche und die Maßzahl der Rasenfläche.	5
4.4	Im Punkt S befindet sich eine senkrecht stehende Straßenlaterne, die in einer Höhe von 2 Metern mit drei Drahtseilen in den Punkten A, B und R abgespannt werden soll. Berechnen Sie die Maßzahl der Gesamtlänge der drei Seile.	3
4.5.0	Um mehr Rasenfläche zu erhalten, wird nun im gepflasterten Bereich Rasen angepflanzt. Begrenzt wird dieses neue Rasenstück durch die Parabel q mit der Gleichung $q(x) = \frac{11}{36}x^2 + 4$.	
4.5.1	Zeigen Sie, dass die Parabel q die beiden Straßenkanten s_1 und s_2 senkrecht schneidet.	5
4.5.2	Berechnen Sie die Maßzahl der neu hinzukommenden Rasenfläche.	4
	Summe	25

Analytische Geometrie		BE
5.0	Im $\mathbf{R}^3$ sind die Punkte A(3; 2; 1), B(1; 6; –1), C(c; 4; 3) und der Vektor $\overrightarrow{AH} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.	
5.1	Bestimmen Sie c so, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.	5
	Für die folgenden Teilaufgaben gilt c = –1.	
5.2	Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke [AB].	2
5.3	Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche des Dreiecks ABC.	3
5.4	Zeigen Sie, dass gilt: $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{AB}$. Bestimmen Sie auch die Koordinaten des Punkts H.	4
5.5	Bestimmen Sie die Größe des Winkels AHB.	3
5.6	Bearbeiten Sie das Beiblatt!	(8)

Fortsetzung nächste Seite!

Name: ______________________________ Bitte geben Sie dieses Blatt wieder ab!

5.6	Die Raumbilder zeigen je einen Quader ABCDEFGH. Die Punkte M_1, M_2 und M_3 sind jeweils die Schnittpunkte der gezeichneten Flächendiagonalen. Gegeben sind drei Vektormengen. Zeichnen Sie die Vektoren jeder Menge in das nebenstehende Raumbild ein und kreuzen Sie an, welche Eigenschaft die Vektoren der angegebenen Mengen haben (Hinweis: Es ist jeweils nur eine Aussage zu jeder Vektormenge richtig).	8

Vektormengen	Raumbilder	Aussagen	
$\left\{\overrightarrow{BM_3};\ \overrightarrow{HM_1}\right\}$		kollinear ☐	linear unab-hängig ☐
$\left\{\overrightarrow{M_2B};\ \overrightarrow{HG};\ \overrightarrow{BH}\right\}$		kollinear ☐	komplanar ☐
$\left\{\overrightarrow{M_1M_2};\ \overrightarrow{DG};\ \overrightarrow{HM_1};\ \overrightarrow{CG}\right\}$		komplanar ☐	linear abhängig ☐

	Summe	25

Bitte geben Sie dieses Blatt wieder ab!