Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2011

Prüfungsfach:	Mathematik (nichttechnische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 9. Juni 2011
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nichtprogrammierbarer Taschenrechner; zugelassene Formelsammlung

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

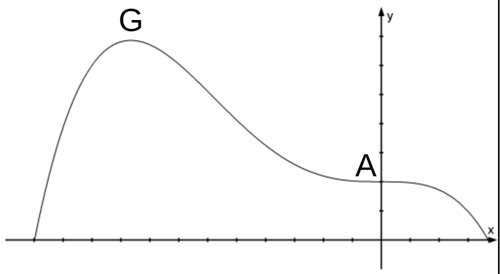
Auf Seite 7 ist der Name einzutragen.

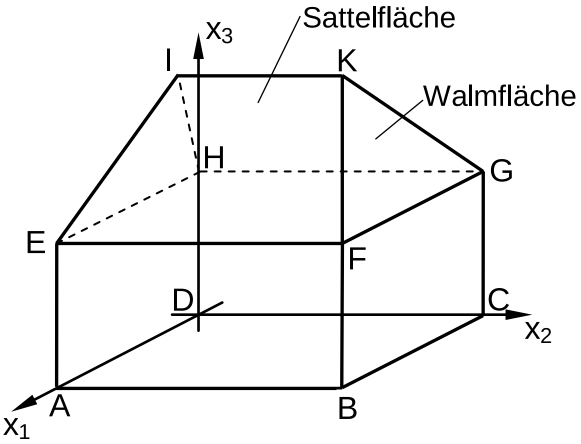
Am Ende der Bearbeitungszeit ist die Seite 7 mit abzugeben.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Von einer Funktion f ist der Term der zweiten Ableitung $f''(x) = 2x^2 + 4x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Der Graph der Funktion f geht durch die Punkte A(2; 8) und B(–1; –0,5).	
1.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x). [Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3$]	5
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen von f mit ihren Vielfachheiten.	2
1.3	Ermitteln Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen der Funktion f. [Teilergebnis: $W_1(-2; y_{w_1})$]	5
1.4	Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$. Zeigen Sie, dass die Gerade g eine Wendetangente des Graphen der Funktion f ist.	2
1.5	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und die Gerade g im Bereich $-4 \le x \le 2$ mit Hilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm	5
1.6	Der Graph der Funktion f und die Gerade g schließen eine Fläche ein. Schraffieren Sie diese Fläche in der Zeichnung aus Teilaufgabe 1.5 und berechnen Sie die Maßzahl ihres Flächeninhalts.	6
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die Funktion h durch $h(x)=\frac{1}{8}(x+2)(x-4)^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.	
2.1	Geben Sie die Nullstellen der Funktion h an.	2
2.2	Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen der Funktion h.	5
2.3	Zeigen Sie, dass $h''(2)=0$ ist und bestimmen Sie damit die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion h.	3
2.4	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Bereich $-2 \le x \le 6$ mit Hilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.	4
2.5	Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche A_1, die der Graph der Funktion h mit den Koordinatenachsen im II. Quadranten einschließt. [Ergebnis: $A_1=\frac{11}{2}$]	4
2.6	Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel p, die den Graphen der Funktion h im Punkt $P(-2;\,0)$ schneidet und einen Hochpunkt bei $(0;\,4)$ besitzt. [Ergebnis: $p(x)=-x^2+4$]	3
2.7	Die Parabel p schließt im II. Quadranten mit den Koordinatenachsen eine Fläche mit der Maßzahl A_2 ein. Die Parabel p stellt nur dann eine gute Näherung an den Graphen der Funktion h dar, wenn die Maßzahl A_2 um weniger als 5 % von A_1 abweicht. Überprüfen Sie, ob die Grenze von 5 % eingehalten wird.	4
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Ein Unternehmen stellt Bauteile her. Die Produktionskosten K (in €) je Tag werden durch den Funktionsterm $K(x) = 0{,}0004x^3 - 0{,}06x^2 + 3x + 100$ in Abhängigkeit der hergestellten Stückzahl x beschrieben. Der Erlös E_p (in €) mit dem Funktionsterm $E_p(x) = p \cdot x$ ergibt sich aus dem Produkt des Verkaufspreises p und der verkauften Stückzahl x. Aufgrund der hohen Nachfrage können alle hergestellten Bauteile auch täglich verkauft werden. Das Unternehmen kann wegen seiner Betriebsgröße höchstens 150 Stück/Tag herstellen. Der Graph der Kostenfunktion K heißt G(K) und der der Erlösfunktion E_p $G(E_p)$. Für die folgenden Teilaufgaben sind nur die Maßzahlen zu berücksichtigen.	
3.1	Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für K und für E_p an. Begründen Sie Ihre Entscheidung.	2
3.2	Ermitteln Sie den Wert für p so, dass für eine verkaufte Anzahl von 50 Bauteilen weder ein Gewinn noch ein Verlust erzielt wird. Das heißt, es gilt: $K(50) = E_p(50)$). Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E_p an. [Teilergebnis: p = 3]	3
3.3	Die Gewinnfunktion A ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Erlös und den Kosten [$A(x) = E_3(x) - K(x)$]. Berechnen Sie die Nullstellen der Gewinnfunktion A und interpretieren Sie diese im gegebenen Sachzusammenhang. [Teilergebnis: $A(x) = -0{,}0004x^3 + 0{,}06x^2 - 100$]	6
3.4	Zeigen Sie, dass bei einer Produktions- und Verkaufsmenge von 100 Stück ein maximaler Gewinn erzielt wird. Ermitteln Sie diesen Gewinn.	5
3.5	Zeichnen Sie die Graphen $G(E_3)$ und G(K) in ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Bereich $0 \leq x \leq 150$ unter Verwendung geeigneter Funktionswerte. Tragen Sie den maximalen Gewinn in das Koordinatensystem mit Farbe (nicht rot!) ein. Maßstab: 1 cm auf der x-Achse A 10 Stück; 1 cm auf der y-Achse A 100 €	6
3.6	Berechnen Sie die Kosten je Stück bei der gewinnmaximalen Verkaufsmenge.	3
	Summe	25

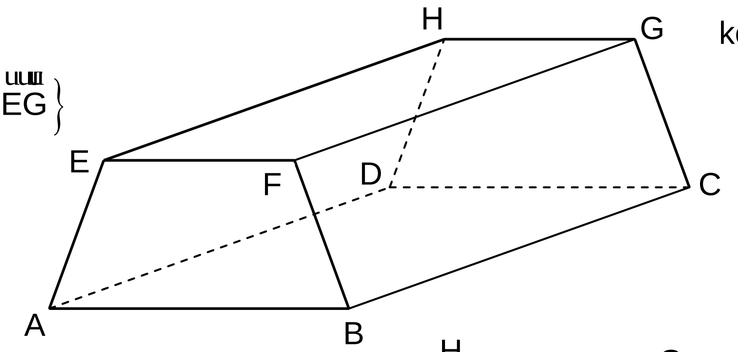
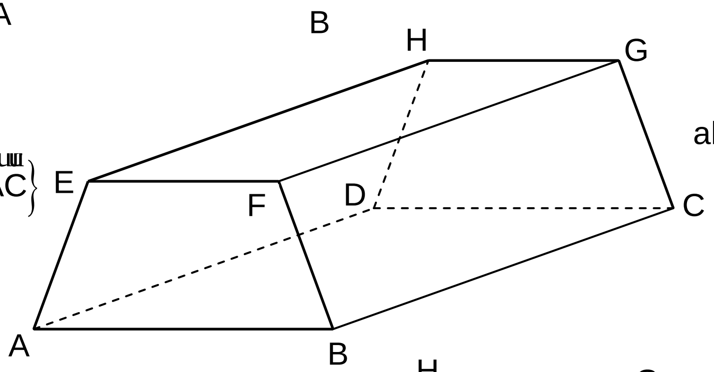
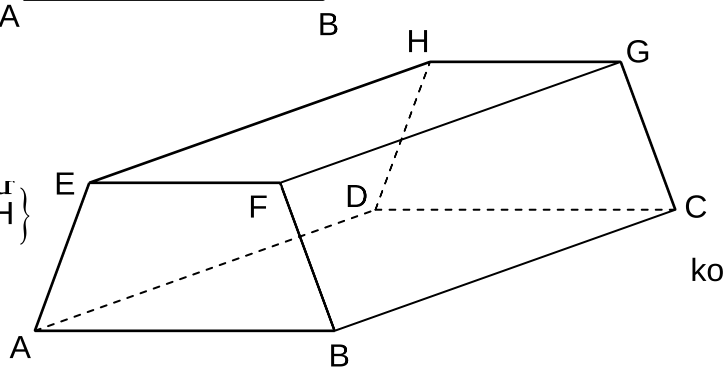
Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Eine Sanddüne besitzt näherungsweise das in nebenstehendem Diagramm abgebildete Profil, welches durch den Graphen der Funktion s mit dem Term $s(x) = -\frac{1}{500}(1{,}3x^4 + 15x^3 - 1000)$ und $D(s) = [-12; 3{,}7]$ beschrieben wird. Die Zahlen sind Maßzahlen mit der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Einheiten soll in den folgenden Rechnungen verzichtet werden. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. 	
4.1	Die Punkte G und A besitzen eine waagrechte Tangente. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte G und A.	4
4.2	Eine Person will auf einem Holzbrett vom Gipfel G auf kürzestem Weg zum Punkt A hinabgleiten und rutscht deshalb entlang des Graphen der Funktion s. Ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Punkt sein Weg das stärkste Gefälle aufweist.	5
4.3.0	Ein Junge sitzt im Punkt B(–2, s(–2)) und wirft einen Ball in Richtung A. Die Flugbahn des Balls wird näherungsweise durch den parabelförmigen Graphen der Funktion p mit $p(x) = -\frac{3}{10}x^2 + 4$ und $D(p) = [-2; 3{,}5]$ beschrieben.	
4.3.1	Zeigen Sie, dass L(3,5, s(3,5)) eine gute Näherung für den Landepunkt des Balls auf der Sanddüne darstellt.	3
4.3.2	Zeigen Sie, dass die Flughöhe h des Balls über der Sanddüne durch den Term $h(x) = \frac{13}{5000}x^4 + \frac{3}{100}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + 2$ mit $D(h) = [-2; 3{,}5]$ ausgedrückt werden kann.	2
4.3.3	Berechnen Sie h(–2) und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Zusammenhang.	2
4.3.4	Bestimmen Sie rechnerisch die maximale Flughöhe des Balls über der Sanddüne.	5
4.3.5	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h für $x \in [-2; 3{,}5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 2 cm.	4
	Summe	25

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Neben abgebildete Skizze zeigt ein Haus mit der Grundform eines Quaders und einem Dach, welches als Walmdach ausgeführt ist.  Für die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen gilt jeweils: 1 LE A 1 m. Die Maße des Hauses sind durch die Koordinaten folgender Punkte gegeben: A(8; 0; 0), B (8; 10; 0), D(0; 0; 0), F(8; 10; 4), G(0; 10; 4), H(0; 0; 4), I(4; 2; 8) und K(4; 8; 8). Der Punkt L(4; –6; –1,5) ist der Fußpunkt eines 13 m hohen Mastes mit der Spitze S. Der Mast steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene. Bei nachfolgenden Rechnungen soll auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden.	
5.1	Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C, E und S.	3
5.2	Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl der Walmfläche FGK.	4
5.3	Berechnen Sie den Abstand der Spitze S des Mastes zum Punkt I.	3
5.4	Die Sattelfläche GHIK ist ein gleichschenkliges Trapez. Berechnen Sie den Innenwinkel GKI.	4
5.5	Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes R der Raumdiagonalen des Quaders.	2
5.6	Bearbeiten Sie das Beiblatt!	

Name: ______________________________ Bitte geben Sie dieses Blatt wieder ab!

5.6.0 Die Raumbilder zeigen drei Prismen. Das Trapez ABFE ist gleichschenklig und seine Grund- und Decklinie sind zueinander parallel. Das Trapez ABFE ist parallel und deckungsgleich zum Trapez DCGH.

5.6.1 Gegeben sind drei Vektormengen. Zeichnen Sie die Vektoren jeder Menge in eines der nebenstehenden Raumbilder des Angabenblattes ein und kreuzen Sie an, welche Eigenschaft die Vektoren der angegebenen Mengen haben (Hinweis: Es ist jeweils nur eine Aussage zu jeder Vektormenge richtig). **6**

Vektormengen	Raumbilder	Eigenschaften	
$\left\{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{HD};\overrightarrow{EG}\right\}$		komplanar ☐	linear unabhängig ☐
$\left\{\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{GE};\ \overrightarrow{AC}\right\}$		linear abhängig ☐	linear unabhängig ☐
$\left\{\overrightarrow{FE};\ \overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{GH}\right\}$		kollinear ☐	linear unabhängig ☐

5.6.2 Gegeben sind die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}=\overrightarrow{FE}$, $\vec{b}=\overrightarrow{FG}$ und $\vec{c}=\overrightarrow{FB}$. Drücken Sie den Diagonalenvektor $\overrightarrow{AG}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus, wenn gilt: $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{FE}$. **3**

Summe **25**

Bitte geben Sie dieses Blatt wieder ab!