

Ergänzungsprüfung
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2012

Prüfungsfach:	Mathematik (nichttechnische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 21. Juni 2012
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; zugelassene Formelsammlung

Hinweise: Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

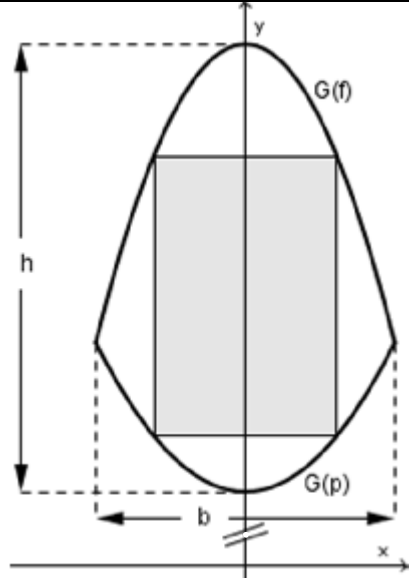
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Die Funktion f mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph $G(f)$ der Funktion f verläuft durch den Ursprung des Koordinatensystems. Er hat im Punkt $P_1(1 1)$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 3$ einen Wendepunkt.	
1.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. [Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{7}x^3 - \frac{9}{7}x^2 + \frac{15}{7}x$]	6
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f . Runden Sie Ihre Ergebnisse, falls notwendig, auf zwei Nachkommastellen.	3
1.3	$G(f)$ hat außer P_1 einen weiteren Extrempunkt P_2 . Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten von P_2 . Geben Sie die Koordinaten exakt an.	4
1.4	Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts und geben Sie diese ungerundet an. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente g . [Mögliches Ergebnis: $g(x) = -\frac{12}{7}x + \frac{27}{7}$]	4
1.5	Zeichnen Sie $G(f)$ und die Wendetangente unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse für $x \in [-1; 7]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: $1 \text{ LE} \triangleq 1 \text{ cm}$	4
1.6	$G(f)$ schließt im I. Quadranten mit der senkrechten Geraden $x = 2$ eine endliche Fläche ein. Schraffieren Sie diese Fläche in der graphischen Darstellung der Teilaufgabe 1.5 und berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhaltes.	4
Summe:		25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Der Graph $G(h)$ einer Polynomfunktion h vierten Grades mit $D(h) = \mathbb{R}$ verläuft durch den Punkt $P(-2 1)$, hat im Ursprung eine dreifache und bei $x = 8$ eine einfache Nullstelle.	
2.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm $h(x)$. [Mögliches Ergebnis: $h(x) = \frac{1}{80} \cdot (x^4 - 8x^3)$]	2
2.2	Bestimmen Sie Art und Koordinaten der Punkte von $G(h)$ mit waagerechter Tangente.	5
2.3	Zeigen Sie, dass $G(h)$ an der Stelle $x = 4$ den Wendepunkt W hat und bestimmen Sie seine y-Koordinate.	3
2.4	$G(h)$ hat in W die Tangente mit der Gleichung $g: y = -\frac{8}{5}x + \frac{16}{5}$. Zeichnen Sie die Tangente g und, unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse, den Graphen $G(h)$ im Bereich $-4 \leq x \leq 9$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein. Maßstab auf beiden Achsen: $1 \text{ LE} \triangleq 1 \text{ cm}$	4
2.5	Die Wendetangente g und $G(h)$ besitzen außer dem Wendepunkt W noch einen weiteren Schnittpunkt S . Berechnen Sie die Koordinaten von S . [Teilergebnis: $S(-4 y_S)$]	5
2.6	Der Graph $G(h)$ und die Wendetangente g begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie dessen Maßzahl A_1 . [Ergebnis: $A_1 = 20,48$]	3
2.7	Der Graph $G(h)$ schließt weiterhin im IV. Quadranten mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass dessen Maßzahl A_2 gleich der Maßzahl A_1 aus der Teilaufgabe 2.6 ist.	3
	Summe:	25

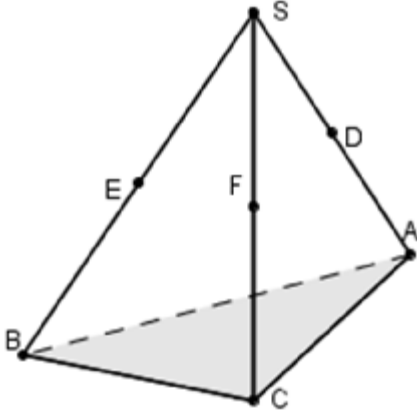
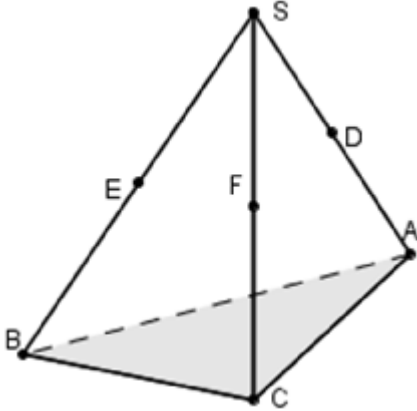
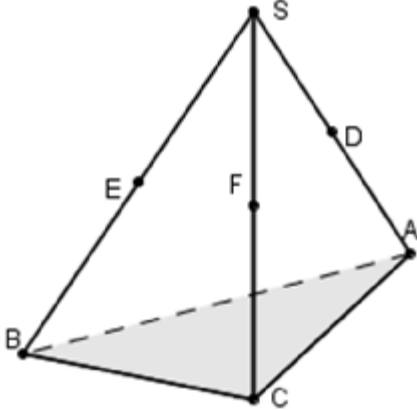
Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	<p>Eine Werbeagentur soll ein Firmenlogo nach folgenden Vorgaben gestalten:</p> <p>Zwei Parabelbögen bilden den Umriss des achsensymmetrischen Logos.</p> <p>Die Umrisslinien sind Teile der Graphen der Funktionen $G(f)$ und $G(p)$ mit den Gleichungen</p> $G(f) = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \quad \text{und} \quad G(p) = \frac{1}{4}x^2 - 1.$ <p><u>Hinweis:</u></p> <p>Runden Sie Ihre Ergebnisse, falls erforderlich, auf eine Nachkommastelle.</p>	
3.1	Berechnen Sie die Maßzahlen der Gesamtbreite b sowie der Gesamthöhe h des Logos und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D an, die für die beiden Funktionen $G(f)$ und $G(p)$ im Anwendungsbezug gilt.	4
3.2	Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche <u>des Logos</u> .	3
3.3.0	Dem Logo ist ein Rechteck einbeschrieben.	
3.3.1	Bestimmen Sie den Term $A(x)$, der die Flächenmaßzahl <u>des Rechtecks</u> in Abhängigkeit von x angibt.	2
3.3.2	Begründen Sie, dass $D = [-2, 2]$ eine sinnvolle Definitionsmenge für $A(x)$ ist.	2
3.3.3	Bestimmen Sie die Seitenlängen der Rechtecke, deren Flächeninhalte 9 FE betragen.	5
3.3.4	Berechnen Sie, für welche $x \in D$ sich der größte Flächeninhalt ergibt und geben Sie $A(x)$ an.	5
3.3.5	Bestimmen Sie für den Sonderfall, dass das Rechteck ein Quadrat ist, die entsprechende Seitenlänge.	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 4		BE																		
4.0	<p>Eine Photovoltaik-Anlage wandelt Sonnenlicht in Strom um. Sie schaltet sich in Abhängigkeit von den Lichtverhältnissen selbstständig ein und aus.</p> <p>An einem wolkenlosen Sommertag schaltet sich die Anlage um 6:00 Uhr zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ein. Für diesen Tag ergibt sich näherungsweise die Funktion p mit $p(t) = \frac{1}{200} \cdot (t^4 - 28t^3 + 196t^2)$ zur Berechnung der elektrischen Leistung dieser Anlage. Die Funktion p gibt die elektrische Leistung $p(t)$ [in kW] abhängig von der Zeit t [in h] an. Auf die Mitführung von Maßeinheiten soll verzichtet werden.</p>																			
4.1	Die Anlage schaltet sich wieder ab, wenn die Leistung p gleich Null ist. Berechnen Sie den Abschaltzeitpunkt t_1 am betrachteten Tag und geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion p an.	3																		
4.2	Berechnen Sie den Zeitpunkt t_2 , bei dem die Anlage ihre maximale Leistung erreicht und geben Sie diese an.	6																		
4.3	Bestimmen Sie die Wendestellen t_3 und t_4 des Graphen der Funktion p und beschreiben Sie deren Bedeutung für den zeitlichen Verlauf der Leistung.	4																		
4.4	<p>Übertragen Sie die gegebene Wertetabelle auf Ihr Blatt und berechnen Sie die entsprechenden Funktionswerte.</p> <table><tr><td>t</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td></tr><tr><td>p(t)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> <p>Zeichnen Sie unter Einbeziehung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion p für $0 \leq t \leq 14$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.</p>	t	2	4	5	7	9	10	12	14	p(t)									3
t	2	4	5	7	9	10	12	14												
p(t)																				
4.5	Die während eines Tages erzeugte Energiemenge E [in kWh] entspricht dem Inhalt der vom Graphen der Funktion p und der t -Achse eingeschlossenen endlichen Fläche. Berechnen Sie E .	3																		
4.6.0	Die Anlage gilt als besonders effektiv, wenn die Leistung mindestens 8 [kW] beträgt.																			
4.6.1	Zeigen Sie, dass es außer 10:00 Uhr und 16:00 Uhr keine weiteren Zeitpunkte gibt, an denen die Leistung genau 8 kW beträgt.	5																		
4.6.2	Begründen Sie, dass die Anlage nur zwischen 10:00 Uhr und 16:00 Uhr besonders effektiv arbeitet.	1																		
	Summe:	25																		

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	<p>Ein gewaltiger Sandsturm legt in der Libyschen Wüste eine bislang unentdeckte Pyramide teilweise frei. Von den Ecken der Grundfläche ABC_n ist lediglich die Ecke C_n noch unter dem Sand begraben (siehe Skizze!). Untersuchungen ergeben folgende Daten:</p> <p style="text-align: center;"> $\vec{SA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{SB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{SC_n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ </p> <p>Die Koordinaten der Punkte sind Maßzahlen mit der Einheit Meter. Auf die Mitführung von Maßeinheiten soll verzichtet werden.</p>	
5.1	Berechnen Sie den Umfang sowie die Maße der Innenwinkel des Dreiecks ABS .	4
5.2	Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke $[AB]$.	2
5.3	Eines der Dreiecke ABC_n besitzt bei A einen rechten Winkel. Bestimmen Sie den Wert n des dazugehörigen Parameters und geben Sie die Koordinaten des Eckpunktes C_n dazu an.	3
5.4	Es existieren zwei Parameter n so, dass der Abstand $ SA $ der Punkte S und A gleich dem Abstand $ BC_n $ der Punkte B und C_n bzw. $ AB $ und $ SC_n $ ist. Bestimmen Sie n und C_n .	3
5.5.0	Messungen eines Forschungsteams legen nahe, den Punkt C_5 als die noch verschüttete Ecke der Pyramide anzunehmen.	
5.5.1	Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide ABC_5S .	4
5.5.2	Der Punkt C_5 soll genauer untersucht werden. Stellen Sie den Vektor $\vec{SC_5}$ als Linearkombination der Vektoren \vec{SA} und \vec{SB} dar.	3
5.6	Bearbeiten Sie das Beiblatt (Seite 7).	(19)

Fortsetzung nächste Seite!

Name: _____ Bitte geben Sie dieses Blatt wieder ab!

5.6	Die Raumbilder zeigen das Tetraeder ABCS. Die Punkte D, E und F sind Seitenmitten. Gegeben sind drei Vektormengen. Zeichnen Sie die angegebenen Vektoren in das nebenstehende Raumbild ein. Kreuzen Sie dann jeweils an, ob die angegebene Eigenschaft auf die gegebene Vektormenge zutrifft oder nicht. Beachten Sie: Bei einer falschen Antwort wird eine Bewertungseinheit (BE) abgezogen. Die kleinstmögliche BE-Anzahl dieser Aufgabe ist Null.	6
Vektormenge	Raumbild	Eigenschaften
a)		komplanar linear abhängig
b)		komplanar linear abhängig
c)		je zwei der Vektoren sind kollinear komplanar
Summe:		25