Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2013

Prüfungsfach:	Mathematik (nichttechnische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 20. Juni 2013
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; zugelassene Formelsammlung

Hinweise: Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Die Funktion f mit $x \in IR$ ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades. Der Graph G(f) der Funktion f berührt die x-Achse im Punkt P_1 $(4\|0)$, hat an der Stelle $x = 2$ die Steigung -2 und schneidet die y-Achse bei $y = 4$.	
1.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x). $\left[\text{Mögliches Ergebnis: } f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 2x + 4\right]$	6
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie den Term in Linearfaktordarstellung an.	4
1.3	Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G(f). Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.	5
1.4	Zeichnen Sie G(f) unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse für $x \in [-1; 6]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. [Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE ≙ 1 cm]	3
1.5	Die Gerade g schneidet G(f) in den Punkten A $(0\|4)$ und B $(3\|y_B)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm g(x) und zeichnen Sie den Graphen von g in das unter 1.4 angefertigte Koordinatensystem.	3
1.6	Die Graphen von f und g schließen zwischen den Punkten A und B eine endliche Fläche ein. Schraffieren Sie diese Fläche in der graphischen Darstellung der Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl A des Flächeninhaltes auf zwei Nachkommastellen genau.	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die Stammfunktion H mit der Funktionsgleichung $H(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 3$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D(H) = IR. Der Graph der Funktion H wird mit G(H) bezeichnet.	
2.1	Untersuchen Sie G(H) auf Symmetrie.	2
2.2	Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion H und geben Sie den Funktionsterm von H in faktorisierter Form an.	4
2.3	Zeigen Sie, dass die Funktion H eine Stammfunktion von $h(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}x$ ist.	2
2.4	Übertragen Sie die nachstehende Tabelle auf Ihr Blatt und ermitteln Sie dann die fehlenden Werte. (Tabelle siehe unten)	4
2.5	Geben Sie aufgrund Ihrer bisherigen Berechnungen die Art der Extrema des Graphen der Stammfunktion G(H) an. Begründen Sie Ihre Aussage und berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.	4
2.6	Zeigen Sie anhand Ihrer bisherigen Ergebnisse, dass der Graph G(H) der Stammfunktion H an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ Wendestellen besitzt.	3
2.7.0	Betrachten Sie bei den folgenden Aufgaben die Funktion $h(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}x$. Der Graph der Funktion h wird mit G(h) bezeichnet.	
2.7.1	Zeichnen Sie den Graphen G(h) unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter weiterer Werte in ein Koordinatensystem im Bereich $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$. [Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE ≙ 1 cm]	3
2.7.2	Der Graph G(h) schließt mit der x-Achse im Bereich $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ endliche Flächen ein. Berechnen Sie die zugehörige Flächenmaßzahl A.	3
	Summe:	25

Tabelle zu 2.4:

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
$H'(x) = h(x)$	$\frac{8}{9}$		$-\frac{8}{9}$	0	$\frac{8}{9}$		$-\frac{8}{9}$
$H''(x) = h'(x)$	-4			$\frac{4}{3}$			-4

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Während einer Virusepidemie steckt sich jeden Tag eine bestimmte Zahl von Personen neu an. Die Zahl der Neuansteckungen pro Tag n(t) lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion darstellen: $n(t) = -\frac{1}{7\,200}t^3 + \frac{1}{80}t^2.$ Die Zeiteinheit t wird in Tagen angegeben und n(t) gibt die Zahl der am jeweiligen Tag neu infizierten Personen in Tausenden an.	
3.1	Geben Sie den größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich der Funktion n(t) an.	2
3.2	Ermitteln Sie die Zahl der Neuansteckungen am 15. Tag, 30. Tag und 75. Tag.	3
3.3	Berechnen Sie, an welchem Tag die Zahl der neu infizierten Personen am höchsten ist und geben Sie auch die zugehörige Anzahl an.	4
3.4	Ermitteln Sie, an welchem Tag die Anzahl der Neuansteckungen am stärksten zunimmt.	4
3.5	Ermitteln Sie, an welchen Tagen die Zahl der neu angesteckten Personen 7 500 beträgt.	4
3.6	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion n(t) anhand Ihrer bisherigen Ergebnisse und geeigneter Zusatzwerte bis zum Abklingen der Epidemie (keine weiteren Neuansteckungen) in ein kartesisches Koordinatensystem. [Maßstab auf der t-Achse: 10 Tage ≙ 1 cm] [Maßstab auf der Ordinate: 1 000 Neuerkrankte ≙ 1 cm]	4
3.7	Die Anzahl der Gesamterkrankungen lässt sich über das Integral der Funktion n(t) bestimmen. Ermitteln Sie die Anzahl der infizierten Personen bis zum 60. Tag.	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Einem landwirtschaftlichen Betrieb entstehen bei der Zucht von Kaninchen Gesamtkosten k, die von der Menge x abhängen. Die Kosten lassen sich durch folgende Funktion darstellen: $k(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 9x^2 + 27x + 3)$. Für die Definitionsmenge der Funktion k gilt: $D(k) = [0; 8]$. Der Graph der Funktion k wird als G(k) bezeichnet. Die Kosten k werden in 1 000,00 € und die Menge x in 100 Kaninchen angegeben.	
4.1	Zeigen Sie, dass die Funktion k auf ihrer gesamten Definitionsmenge streng monoton zunimmt. Geben Sie die Bedeutung dieses Ergebnisses für die Gesamtkosten k an.	5
4.2	Bestimmen Sie den Punkt P des Graphen G(k), bei dem die Kostensteigerung am geringsten ist. Begründen Sie kurz, um welchen besonderen Punkt des Graphen G(k) es sich bei P handelt.	3
4.3	Die Zuchtkaninchen werden an einen Zoohändler verkauft. Es ergibt sich als Erlösfunktion die Funktion $e(x) = 1{,}45x$; $D(e) = D(k) = [0; 8]$. Der Gewinn bzw. Verlust wird durch die Funktion $g(x) = e(x) - k(x)$ beschrieben. Also gilt: $g(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 12{,}5x - 3)$; $D(g) = D(k) = [0; 8]$. Ermitteln Sie die Stückzahlen, für die der Betrieb einen Gewinn erzielt.	6
4.4	Zeichnen Sie die Graphen der Gesamtkostenfunktion k und der Erlösfunktion e anhand Ihrer bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. [Maßstab auf der x-Achse: 100 Kaninchen ≙ 1 cm] [Maßstab auf der Ordinate: 1 000,00 € ≙ 1 cm]	6
4.5	Berechnen Sie den maximalen Gewinn g_{max}, den der Betrieb bei der Zucht der Kaninchen erzielt.	5
	Summe:	25

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(5{,}5\|3\|-2)$; $B(0{,}5\|3\|-2)$; $C(0{,}5\|0\|2)$ und $S(3\|5{,}5\|3)$.	
5.1	Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.	4
5.2	Der Punkt D bildet mit A, B und C ein Quadrat. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.	2
5.3	Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Quadrats ABCD. [Ergebnis: $M(3;\ 1{,}5;\ 0)$]	2
5.4	Berechnen Sie den Normalenvektor $\vec{n}$ zum Quadrat ABCD und zeigen Sie, dass $\vec{n}$ kollinear zu $\overrightarrow{MS}$ ist.	4
5.5	Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.	3
5.6	Die Pyramide ABCDS´ hat die Hälfte des Volumeninhaltes wie die Pyramide ABCDS. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S´.	2
5.7	Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen einer Dreiecksseite und der Grundfläche der Pyramide ABCDS.	4
5.8	R ist der Mittelpunkt der Seite [BS]. Untersuchen Sie, ob der Vektor $\overrightarrow{MR}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AS}$ dargestellt werden kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechende Linearkombination.	4
	Summe:	25

Bewertungsschlüssel:

BE = Bewertungseinheiten	100 - 86	85 - 71	70 - 56	55 - 41	40 - 21	20 - 0
Note	1	2	3	4	5	6