Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2008

Prüfungsfach:	Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 26. Juni 2008
Prüfungsdauer:	09:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

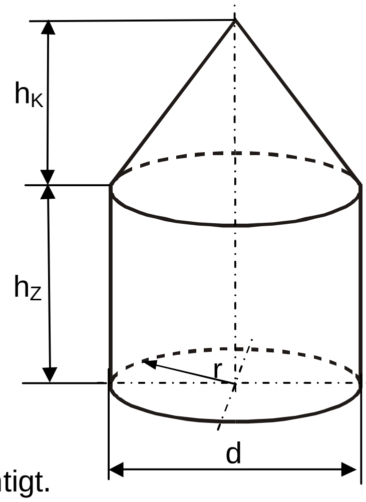
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

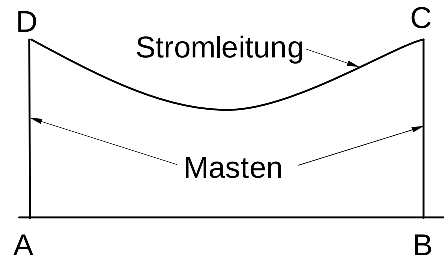
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

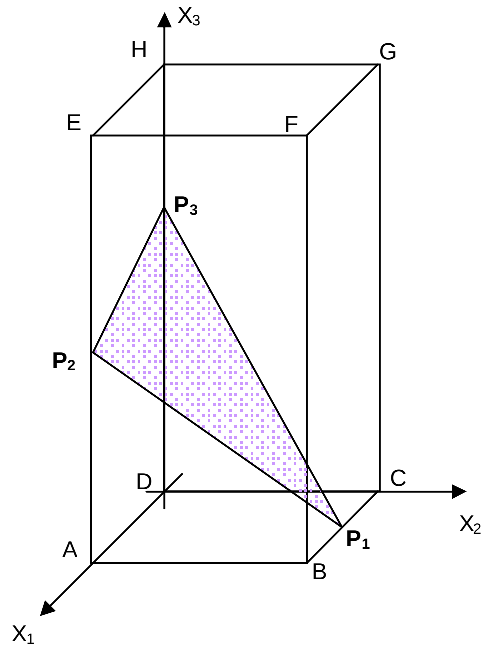
Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto 0{,}5x + \frac{2x}{x^2-4}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G(f).	
1.1	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G(f) zum Koordinatensystem.	2
1.2	Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G(f).	3
1.3	Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen G(f) streng monoton fällt bzw. streng monoton steigt. Bestimmen Sie daraus Lage und Art aller Punkte von G(f) mit horizontaler Tangente. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{2(x^2-4)^2}$]	9
1.4	Berechnen Sie die Funktionswerte von f für $x \in \{0; 1{,}75; 2{,}25; 3; 5\}$ und zeichnen Sie G(f) und alle Asymptoten im Bereich $-5 \le x \le 5$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem unter Verwendung bisheriger Ergebnisse. Maßstab auf beiden Koordinatenachsen: 1 LE = 1cm	6
1.5	Der Graph G(f), die Geraden x = 3, x = 5 und y = 0,5x schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto \frac{x^2}{4} + \ln(x^2-4)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist und berechnen Sie die Maßzahl der oben beschriebenen Fläche.	5
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto (4-2x)e^{-0{,}5x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(f) = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion f wird mit G(f) bezeichnet.	
2.1	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$.	4
2.2	Berechnen Sie Art und Lage des Extremalpunktes und die Koordinaten des Wendepunktes von G(f). [Teilergebnis: $f'(x) = (x-4)e^{-0{,}5x}$]	6
2.3	Zeichnen Sie G(f) im Bereich $-0{,}5 \le x \le 7$. Erstellen Sie dazu eine geeignete Wertetabelle und verwenden Sie die bereits vorliegenden Ergebnisse. Maßstab auf beiden Achsen: 1LE = 1cm	5
2.4	Zeigen Sie, dass die Funktion F: $x \mapsto 4xe^{-0{,}5x} - 3$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.	2
2.5	Berechnen Sie $-\int_2^6 f(x)dx$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.	3
2.6	Durch die Funktion $g_m : x \mapsto mx$ mit $m \in \mathbb{R}$ sind die reellen Geraden g_m gegeben. Berechnen Sie die beiden Werte für m so, dass sich G(f) und die Geraden g_m berühren.	5
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Für einen Kinderartikel wünscht die Marketingabteilung einer Firma eine besondere Form der Verpackung, die ein Volumen von $2\ \text{dm}^3$ aufweisen soll. Die aus Pappkarton herzustellende Verpackung besteht aus einem geraden Kreiszylinder mit einem aufgesetzten geraden Kreiskegel einschließlich des Bodens (siehe Skizze). Für den Radius r des Zylinders gilt: $h_K = \frac{4}{3}r$.  Die Dicke des Pappkartons wird nicht berücksichtigt. Auf die Mitführung von Maßeinheiten soll bei den folgenden Teilaufgaben verzichtet werden.	
3.1	Bestimmen Sie die Oberfläche O mit der Definitionsmenge $D_O =]0; \sqrt[3]{\frac{18}{4\pi}}]$ der Verpackung in Abhängigkeit des Radius r des Kreiszylinders. [Ergebnis: $O(r) = \frac{4}{r} + \frac{16\pi r^2}{9}$]	6
3.2	Ermitteln Sie das Verhalten der Oberfläche an den Rändern des Definitionsbereiches. Runden Sie gegebenenfalls ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.	4
3.3	Bestimmen Sie den Radius r_0 so, dass für die Produktion der Verpackung möglichst wenig Pappkarton aufgewendet werden muss. [Ergebnis: $r_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{8\pi}}$]	6
3.4	Bestimmen Sie die Kegelhöhe h_{K_0} und die Zylinderhöhe h_{Z_0} für r_0 auf zwei Nachkommastellen gerundet und ermitteln Sie das Verhältnis $\frac{h_{K_0}}{h_{Z_0}}$.	4
3.5	Erstellen Sie eine Wertetabelle im Bereich $0{,}2 \le r \le 1{,}0$ mit der Schrittweite $\Delta r = 0{,}2$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion O in ein rechtwinkliges Koordinatensystem im angegebenen Bereich unter Verwendung eines geeigneten Maßstabes.	5
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Eine Stromleitung hängt frei zwischen zwei auf horizontalem Boden senkrecht aufgestellten Masten. Die Fußpunkte der Masten befinden sich bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems bei A(–50; 0) bzw. B(50; 0). Der Verlauf der Stromleitung folgt dem Graphen G(k)  der reellen Funktion $k \mapsto k(x) = 50(e^{\frac{x}{100}} + e^{\frac{-x}{100}}) - 80$ mit $x \in [-50;\, 50\,]$. Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet, die Koordinaten von Punkten können aber als Maßzahlen in Metern gedeutet werden.	
4.1	Untersuchen Sie G(k) auf Symmetrie zum in 4.0 festgelegten Koordinatensystem und berechnen Sie die Höhe h_1, in der die Stromleitung jeweils an den beiden Masten befestigt ist (Punkte C und D). Runden Sie ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. [Teilergebnis: $h_1 \approx 32{,}76$]	3
4.2	Berechnen Sie die minimale Höhe h_0 der Stromleitung über dem horizontalen Boden.	6
4.3	Bestimmen Sie den Winkel, den die Stromleitung mit dem Mast im Punkt $C(50;\, h_1)$ einschließt.	4
4.4	Die Funktion k soll durch eine Parabel p mit dem Funktionsterm $p(x) = a + 0{,}005x^2$ als Näherung ersetzt werden. Ermitteln Sie den Parameter a auf zwei Nachkommastellen gerundet, sodass die Graphen der Funktionen p und k in den Punkten C und D übereinstimmen. [Ergebnis: $a \approx 20{,}26$]	3
4.5	Im Bereich $0 \le x \le 50$ steht ein Kran von 2,5 m Breite und 22,76 m Höhe, dessen Querschnitt als rechtwinklig angenommen wird. Berechnen Sie, welchen Abstand s der Kran vom Fußpunkt B des rechten Masten höchstens aufweisen darf, wenn zwischen Stromleitung und Kran ein Mindestabstand von 2,0 m einzuhalten ist. Als Näherung für die Stromleitung kann die Funktion p der Teilaufgabe 4.4 verwendet werden.	4
4.6	Die Funktion $d: x \mapsto d(x) = p(x) - k(x) = 0{,}005x^2 + 100{,}26 - 50(e^{\frac{x}{100}} + e^{\frac{-x}{100}})$ mit D(d) = [–50; 50] beschreibt den in y-Richtung gemessenen Abstand zwischen dem Stromkabel und der Näherung aus Teilaufgabe 4.4. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion d in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Lesen Sie aus Ihrer Zeichnung den maximalen Abstand d_{max} ab. Maßstäbe: auf der x-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 10 (m); auf der y-Achse: 1 cm $\hat{=}$ 0,1 (m)	5
	Summe	25

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Die nebenstehende Skizze zeigt einen Quader mit der quadratischen Grundfläche ABCD in einem kartesischen Koordinatensystem. Zudem sei $P_1(1{,}5;\ 3;\ 0)$ Mittelpunkt der Strecke [BC] und $P_2(3;\ 0;\ 3)$ Mittelpunkt der Strecke [AE].  	
5.1	Berechnen Sie die Maßzahl der Länge der Strecke $[P_1P_2]$.	2
5.2	Der Punkt P_3 liegt so auf der Strecke [DH], dass das Dreieck $P_1P_2P_3$ bei P_2 einen rechten Winkel erhält. Berechnen Sie den Punkt P_3. (Ergebnis: $P_3(0;\ 0;\ 4{,}5)$)	4
5.3	Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$.	4
5.4	Die Ebene E beinhaltet die Punkte P_1, P_2 und P_3. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform. (Mögliches Ergebnis: E: $x_1 + 2{,}5x_2 + 2x_3 - 9 = 0$)	3
5.5	Die Ebene E schneidet die Strecke [CG] im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S.	3
5.6	Ermitteln Sie den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.	3
5.7	Die Punkte B und F legen die Gerade g und die Punkte P_1 und P_2 legen die Gerade h fest. Berechnen Sie den Abstand zwischen den windschief verlaufenden Geraden g und h.	6
	Summe	25