Ergänzungsprüfung

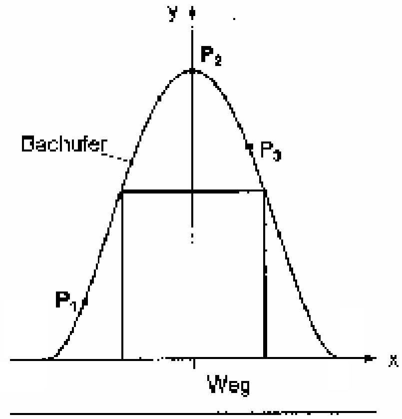
zum Erwerb der Fachhochschulreife 2009

Prüfungsfach:	Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 25. Juni 2009
Prüfungsdauer:	09:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nichtprogrammierbarer Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

Hinweise:	Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.
	Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.
	Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.
	Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Prüflingen zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2}$ in der maximalen Definitionsmenge D(f). Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G(f).	
1.1	Bestimmen Sie die Definitionsmenge D(f) und das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.	4
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.	2
1.3	Berechnen Sie Art und Lage des relativen Extrempunktes von G(f). [Teilergebnis: $f'(x) = \frac{3x-4}{x^3}$]	5
1.4	Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen G(f) rechts- bzw. linksgekrümmt ist und geben Sie den Wendepunkt von G(f) an.	4
1.5	Berechnen Sie die Funktionswerte für $x \in \{-5; -2; -1; 0,5; 3; 5\}$ und zeichnen Sie G(f) und alle Asymptoten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Koordinatenachsen: 1LE = 1cm	5
1.6	Der Graph G(f), die Geraden y = 1 und x = 5 schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie diese Fläche im Diagramm der Teilaufgabe 1.5 und berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.	5
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $g: x \mapsto \ln(\frac{x-0,5}{e^x})$ in der maximalen Definitionsmenge D(g). Der Graph der Funktion g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G(g) bezeichnet.	
2.1	Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D(g) und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion g an den Rändern von D(g). Geben Sie auch die Gleichung der Asymptote von G(g) an.	6
2.2	Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm g(x) auch in der Form $g(x) = \ln(x-0,5) - x$ darstellen lässt.	2
2.3	Berechnen Sie Art und Lage des lokalen Extrempunktes von G(g).	5
2.4	Zeichnen Sie G(g) und seine Asymptote im Bereich $0,5 < x \leq 7$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein. Maßstab auf beiden Koordinatenachsen: 1LE = 1cm	5
2.5	Zeigen Sie, dass die Funktion G: $x \mapsto (x-0,5)\cdot\ln(x-0,5) - \frac{x^2}{2} - x$ für $x \in D(g)$ eine Stammfunktion der Funktion g ist.	3
2.6	Berechnen Sie $\left\lvert \int_2^3 g(x)dx \right\rvert$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.	4
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Auf einer öffentlichen ebenen Fläche, die durch einen Bach und einen Weg begrenzt ist, soll eine Rechteckfläche für Freizeitspiele angelegt werden. Bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems entspricht der Wegrand der x-Achse und der Verlauf des Bachufers wird durch den Graphen G(f) einer reelle Funktion $f: x \mapsto f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbf{R}$ und $x \in [-8; 8]$ beschrieben (siehe nebenstehende Skizze).  Die Punkte $P_1(-5; 15{,}21)$, $P_2(0; 40{,}96)$ und $P_3(2; 36)$ sind Elemente des Graphen G(f). Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet. Die Koordinaten der Punkte können aber als Maßzahlen in m gedeutet werden.	
3.1	Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f. [Ergebnis: $f(x) = 0{,}01x^4 - 1{,}28x^2 + 40{,}96$]	5
3.2	Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G(f).	2
3.3	A(x) gibt die Maßzahl der Rechteckfläche an. Ermitteln Sie A(x). [mögliches Ergebnis: $A(x) = 0{,}02x^5 - 2{,}56x^3 + 81{,}92x$ für $x \in]0; 8[$]	3
3.4	Berechnen Sie die Maßzahlen der Länge und Breite der Rechteckfläche, für die der Flächeninhalt maximal wird.	6
3.5	Bestimmen Sie die Maßzahl der Restfläche zwischen Bachufer und Weg, wenn das größtmögliche Spielfeld angelegt wird.	4
3.6	Für eine andere Gestaltung der Fläche für Freizeitspiele soll eine möglichst große quadratische Fläche betrachtet werden. Zeigen Sie, dass sich für $x_0 = 5{,}54$ in guter Näherung eine quadratische Fläche ergibt. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die quadratische Fläche kleiner als die maximale Rechteckfläche ist.	5
	Summe	25

<table>
<tr><td colspan="2">Analysis: Aufgabe 4</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>4.0</td><td>Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt ein radioaktives Präparat $N_0 = 2 \cdot 10^9$ radioaktive Atomkerne. Ein radioaktiver Atomkern zerfällt zufällig unter Abstrahlung eines Elektrons in einen Folgekern. In einem Experiment werden zu bestimmten Zeiten $t \geq 0$ die Anzahl $N(t)$ der ausgesandten Elektronen gemessen (siehe nachfolgende Tabelle).
<table>
<tr><td>t in Tagen</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$N(t)$ in 10^9</td><td>0</td><td>0,48</td><td>0,85</td><td>1,13</td><td>1,34</td><td>1,50</td><td>1,75</td></tr>
</table>
Auf die Mitführung der Zeiteinheit (Tage) kann verzichtet werden.</td><td></td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Zeichnen Sie anhand der Wertetabelle aus 4.0 den Graphen (Ursprungsgerade) der Funktion $y: t \mapsto \ln\frac{N_0 - N(t)}{N_0}$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Bestimmen Sie anhand des Graphen den Steigungsfaktor m der Geraden.
Maßstab: t – Achse: 2LE = 1cm; y-Achse: 1LE = 2cm</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Zeigen Sie allgemein, dass sich die Gleichung $\ln(\frac{N_0 - N(t)}{N_0}) = m \cdot t$ auch in der Form $N(t) = N_0 \cdot (1 - e^{m \cdot t})$ darstellen lässt.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4.3.0</td><td>Verwenden Sie in den folgenden Teilaufgaben für die Anzahl der abgestrahlten Elektronen die Funktion $N: t \mapsto N(t) = 2{,}0 \cdot 10^9 \cdot (1 - e^{-0{,}14 \cdot t})$.</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3.1</td><td>Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion N für $t \to \infty$ und deuten Sie das Ergebnis im gegebenen Zusammenhang.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4.3.2</td><td>Berechnen Sie die Zeit t_1, nach der die Hälfte der radioaktiven Atomkerne zerfallen ist.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4.3.3</td><td>Bestimmen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion N.
Begründen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung der Funktion N wie sich mit zunehmender Zeit die Tangentensteigung des Graphen der Funktion N ändert.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4.3.4</td><td>Zeichnen Sie den Graphen der Funktion N für $0 \leq t \leq 15$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit einem geeigneten Maßstab.</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Summe</td><td>25</td></tr>
</table>

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(–1; 2; 0), B(2; 2; 9), C(1; 1; 4,5) und die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -11{,}5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda; \tau \in \mathbb{R}$ gegeben.	
5.1	Zeigen Sie, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt.	2
5.2	Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt S. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g und h und die Koordinaten von S.	6
5.3	Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass die Punkte A, B, C und D ein Parallelogramm ABCD (mit $\overrightarrow{AD}$ parallel $\overrightarrow{BC}$) bilden.	2
5.4	Das Parallelogramm ABCD legt die Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Normalenform. [mögliches Teilergebnis: E: $6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$]	4
5.5	Ermitteln Sie den Abstand des Punktes S(4; –1; –7) von der Ebene E.	4
5.6	Das Parallelogramm ABCD bildet mit dem Punkt S als Spitze eine schiefe Pyramide. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide.	4
5.7	$S^*(s^*_1; \frac{51}{14}; \frac{23}{28})$ mit $s^*_1 > 0 \wedge s^*_1 \in \mathbb{R}$ ist die Spitze einer <u>geraden</u> Pyramide mit gleichem Volumen und gleicher Grundfläche wie die Pyramide aus Aufgabe 5.6. Berechnen Sie s^*_1.	3
	Summe	25