Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2010

Prüfungsfach:	Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 24. Juni 2010
Prüfungsdauer:	09:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

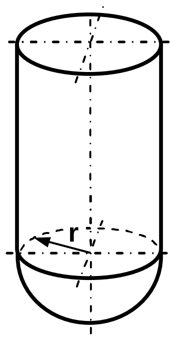
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Prüflingen zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{4x}{1+x^2}$ in der maximalen Definitionsmenge D(f) = $\mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G(f).	
1.1	Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen G(f). Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ und geben Sie die Gleichung der Asymptote an.	4
1.2	Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph G(f) streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt. Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extremalpunkte von G(f). [Teilergebnis: $f'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$]	6
1.3	Die Punkte $P(-1;\ -2)$ und Q(1; 2) legen die Gerade g fest. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g. Die Tangente t durchdringt im Ursprung den Graphen G(f). Berechnen Sie den Winkel, den die Gerade g mit der Tangente t einschließt.	4
1.4	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse G(f) im Bereich $-5 \le x \le 5$ und die Gerade g im Bereich $-2 \le x \le 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1cm	5
1.5	Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \ln(1+x^2)^2$ mit D(F) = $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.	2
1.6	Der Graph G(f) und die Gerade g schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Gesamtfläche der beiden Flächenstücke.	4
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $h: x \mapsto 2\sin(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$ in der maximalen Definitionsmenge $D(h) = [-\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi]$. Der Graph der Funktion h in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G(h).	
2.1	Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion h.	3
2.2	Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion h und berechnen Sie Art und Koordinaten des Extremalpunktes des Graphen G(h). [Teilergebnis: $h'(x) = -\cos(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$]	5
2.3	Zeichnen Sie den Graphen G(h) mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle im Bereich $-\frac{3}{2}\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1cm	5
2.4	Der Graph G(h) und die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl der oben beschriebenen Fläche.	5
2.5	Berechnen Sie die Stelle, an der der Graph G(h) eine maximale Steigung aufweist.	4
2.6	Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung y = 1. Zeichnen Sie die Gerade g in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 2.3 ein. G(h) und die Gerade g schneiden sich im ersten Quadranten im Punkt A. Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes A. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen genau.	3
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Ein Unternehmen stellt Geräte eines bestimmten Typs her. Die Herstellungskosten K in Euro werden durch den Funktionsterm $K(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}2x^2 + 100x + 2000$ in Abhängigkeit der verkauften Stückzahl x beschrieben. Der Ertrag E_p mit dem Funktionsterm $E_p(x) = p \cdot x$ ergibt sich aus dem Produkt des Verkaufpreises p (in Euro pro Stück) und der verkauften Stückzahl x. Für die Definitionsmengen gilt D(K) = D(E) = [0; 140]. Die Graphen der Kostenfunktion K heißen G(K) und der Erlösfunktion E_p $G(E_p)$. Für die folgenden Teilaufgaben sind nur die Maßzahlen zu berücksichtigen.	
3.1	Ermitteln Sie den Wert für p so, dass für eine verkaufte Geräteanzahl von 40 Stück weder ein Gewinn noch ein Verlust erzielt wird (sogenannte Gewinnschwelle oder break-even-point). Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E_p an. [Teilergebnis: p = 118]	3
3.2	Die Gewinnfunktion G ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Erlös und den Kosten ($G(x) = E_{118}(x) - K(x)$). Der Graph der Funktion G heißt G(G). Berechnen Sie die Nullstellen der Gewinnfunktion G und interpretieren Sie diese im gegebenen Sachzusammenhang. [Teilergebnis: $G(x) = -0{,}01x^3 + 1{,}2x^2 + 18x - 2000$]	5
3.3	Bestimmen Sie die Anzahl von verkauften Geräten, bei der der größtmögliche Gewinn erzielt werden kann. Ermitteln Sie diesen Gewinn.	6
3.4	Zeichnen Sie die Graphen $G(E_{118})$, G(K) und G(G) in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $0 \le x \le 140$ ein. Ermitteln Sie mit Hilfe des Graphen G(G) das Intervall, in dem ein Gewinn erzielt wird. Maßstab: 1 cm $\hat{=}$ 20 (Geräte) auf x-Achse, 1 cm $\hat{=}$ 2000 (€) auf der Ordinate	8
3.5	Ermitteln Sie, bei welcher verkauften Stückzahl x ein größtmöglicher Verlust eintreten würde. Geben Sie die Höhe dieses Verlustes an.	3
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Ein Brauereisilo mit einem Volumen von $50\ m^3$ soll aus Edelstahlblech hergestellt werden. Das Silo besteht aus einem geraden Kreiszylinder mit einer unten aufgesetzten Halbkugel (siehe Skizze). Das Silo wird mit einem kreisförmigen, ebenen Deckel verschlossen. Die Dicke des Edelstahlbleches wird nicht berücksichtigt. Auf die Mitführung von Maßeinheiten soll bei den folgenden Teilaufgaben verzichtet werden. 	
4.1	Bestimmen Sie für das Silo die Oberfläche O(r) in Abhängigkeit des Radius r mit der Definitionsmenge $D(O) =]0; \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}]$. [Ergebnis: $O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + 100\frac{1}{r}$]	5
4.2	Ermitteln Sie das Verhalten der Oberfläche O(r) an den Rändern des Definitionsbereiches. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.	3
4.3	Bestimmen Sie den Radius r_0 so, dass für die Herstellung des Silos möglichst wenig Edelstahlblech verwendet werden muss. [Ergebnis: $r_0 = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$]	6
4.4	Erstellen Sie eine Wertetabelle im Bereich $0{,}5 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ mit der Schrittweite $\Delta r = 0{,}5$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion O in ein rechtwinkliges Koordinatensystem im angegebenen Bereich unter Verwendung eines geeigneten Maßstabes.	6
4.5	Die Herstellung der Halbkugel ist doppelt so teuer wie die Herstellung des Zylindermantels und des Deckels. Für die Herstellungskosten in Abhängigkeit des Radius r ergibt sich: $K(r) = \frac{11}{3}\pi r^2 + 100\frac{1}{r}$ (Nachweis nicht erforderlich!) Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion K den Radius r_1 so, dass für die Herstellung des Silos möglichst geringe Kosten entstehen und ermitteln Sie den prozentualen Mehrverbrauch an Edelstahlblech gegenüber der Ausführung des Silos mit dem Radius r_0.	5
	Summe	25

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Im $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt P(1; 0; 0), die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$, die Geradenschar g_k: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\k\\-k\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\k+6\\-1\end{pmatrix}$ und die Ebenenschar F_m $4x_1+(m+2)\,x_2-3=0$ mit λ, k, $m \in \mathbb{R}$ gegeben.	
5.1	Die Ebene E enthält den Punkt P und wird von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform. [mögliches Ergebnis E: $4x_1 + x_2 + 2x_3 - 4 = 0$]	4
5.2	Berechnen Sie den Wert für k so, dass die Gerade g_k senkrecht zur Ebene E verläuft.	3
5.3	Setzen Sie für k = 4 und zeigen Sie durch Rechnung, dass die Gerade g_4 in der Ebene E liegt.	3
5.4	Die Ebene E schneiden die Koordinatenachsen in den Punkten S_1, S_2 und S_3. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte und bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene.	6
5.5	Ermitteln Sie den Winkel φ, den die x_1x_2-Ebene mit der Ebene E einschließt.	3
5.6	Berechnen Sie m so, dass die Ebene F_m parallel zur Geraden g_4 verläuft.	3
5.7	Berechnen Sie m so, dass für den Normalenvektor $\vec{n}_F$ der Ebene F_m gilt: $\left\vert\vec{n}_F\right\vert=5$	3
	Summe	25