Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2011

Prüfungsfach:	Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 9. Juni 2011
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner, zugelassene Formelsammlung

Hinweise: Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

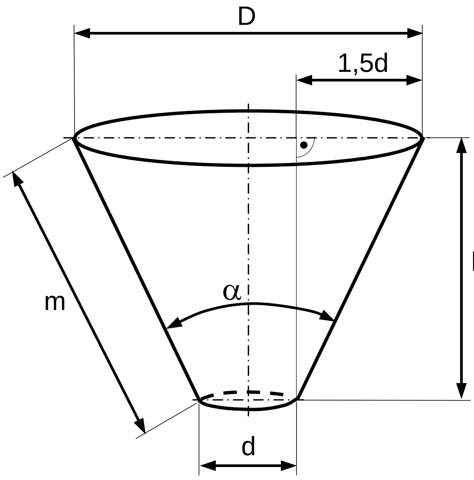
Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Prüflingen zu bearbeiten.

Auf Seite 7 ist der Name einzutragen.

Am Ende der Bearbeitungszeit ist die Seite 7 wieder abzugeben.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f:\ x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1;\,3\}$. Der Graph der Funktion f heißt $G(f)$.	
1.1	Untersuchen Sie die Funktion an den Rändern der Definitionsmenge D(f) und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.	5
1.2	Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen $G(f)$ mit seiner horizontalen Asymptote.	2
1.3	Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen $G(f)$. Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x)=\dfrac{-2x^2-8x+2}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$]	5
1.4	Zeichnen Sie den Graphen und seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und mit Hilfe weiterer geeigneter Punkte im Bereich $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: x-Achse: 1 LE = 1 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm)	7
1.5	Die Geraden $g: y=-0{,}5x-2$, $h: x=2$ und die y-Achse schließen mit dem Graphen $G(f)$ ein Flächenstück ein. Zeichnen Sie die Geraden g und h in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1.4 und kennzeichnen Sie die oben beschriebene Fläche.	3
1.6	Die Funktion $F: x \mapsto F(x)=x+2{,}5\ln(3-x)-0{,}5\ln(x+1)$ ist für $-1 < x < 3$ eine Stammfunktion der Funktion f. (Nachweis nicht erforderlich!). Berechnen Sie die Maßzahl des in Teilaufgabe 1.5 gekennzeichneten Flächenstücks.	3
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $g: x \mapsto (2x-4)\cdot e^{-0,5x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(g)=\mathbb{R}$. Der Graph der Funktion g in einem rechtwinkligen Koordinatensystem wird mit G(g) bezeichnet.	
2.1	Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G(g) mit den Koordinatenachsen.	3
2.2	Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von g für $x \to \infty$ sowie $x \to -\infty$.	4
2.3	Bestimmen Sie Koordinaten und Art des Extrempunktes und die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen G(g). [Teilergebnis: $g'(x)=(4-x)\cdot e^{-0,5x}$]	5
2.4	Zeichnen Sie den Graphen G(g) im Bereich $0 \le x \le 7$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Maßstab auf der x-Achse: 1 LE = 1 cm, auf der y-Achse: 1 LE = 2 cm	5
2.5	Berechnen Sie, unter welchem Winkel der Graph G(g) die y-Achse schneidet.	3
2.6	Zeigen Sie, dass die Funktion $G: x \mapsto -4x\cdot e^{-0,5x}$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion g ist.	2
2.7	Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_{0,684}^{4,414} g(x)dx$ auf zwei Nachkommastellen genau und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.	3
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Für eine Abfüllanlage sollen Trichter in Form eines geraden Kegelstumpfes (siehe Skizze) hergestellt werden. Für die Durchmesser des Trichters gilt: $D = 4d$ und für die Mantellinie m = 10 (LE). Die Wandstärke des verwendeten Materials wird nicht berücksichtigt. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. 	
3.1	Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(h) des Trichters in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der zugehörigen Funktion V an. [mögliches Teilergebnis: $V(h) = \frac{7}{9}h\pi(100 - h^2)$]	7
3.2	Berechnen Sie die Höhe h_{max} so, dass das Volumen des Trichters maximal wird. Bestimmen Sie das maximale Volumen und zeigen Sie, dass es sich bei diesem Wert um ein absolutes Maximum handelt. [Teilergebnis: $h_{max} = \frac{10}{\sqrt{3}}$]	6
3.3	Ermitteln Sie den Öffnungswinkel α des Trichters mit maximalem Volumen.	2
3.4	Erstellen Sie eine Wertetabelle im Bereich $1 \le h \le 9$ mit der Schrittweite $\Delta h = 2$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion V in ein rechtwinkliges Koordinatensystem im Definitionsbereich unter Verwendung eines geeigneten Maßstabes.	5
3.5	Für einen anderen Trichter liefert die Formel $V(h) = \frac{7}{9}h\pi(100 - h^2)$ die Volumenmaßzahl 77π. Zeigen Sie, dass die Höhe h = 1 ein möglicher Wert für diesen Trichter ist und berechnen Sie alle weiteren möglichen Höhen.	5
	Summe	25

Analysis: Aufgabe 4	BE

4.0 Der Benzinverbrauch eines PKW-Motors (in Liter) lässt sich in Abhängigkeit von der Drehzahl x des Motors (in 1000 Umdrehungen pro Minute) näherungsweise durch eine reelle Funktion B mit dem Term $B(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $x \in [1; 5{,}5]$ beschreiben. Folgende Tabelle wurde für die Prüfdauer von einer Stunde für den Motor ermittelt:

Drehzahl (in 1000 min^{-1})	1	3	5
Benzinverbrauch (in Liter)	$\frac{952}{125}$	$\frac{712}{125}$	$\frac{1000}{125}$

Bei der Berechnung wird auf die Verwendung von Einheiten verzichtet. Der Graph der Funktion B wird mit G(B) bezeichnet.

4.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion B. — **6**

[Mögliches Ergebnis: $B(x) = \frac{2}{125}(x^4 - 25x^2 + 500)$]

4.2 Berechnen Sie die Drehzahl für den geringsten Benzinverbrauch und ermitteln Sie den Benzinverbrauch auf eine Nachkommastelle. — **4**

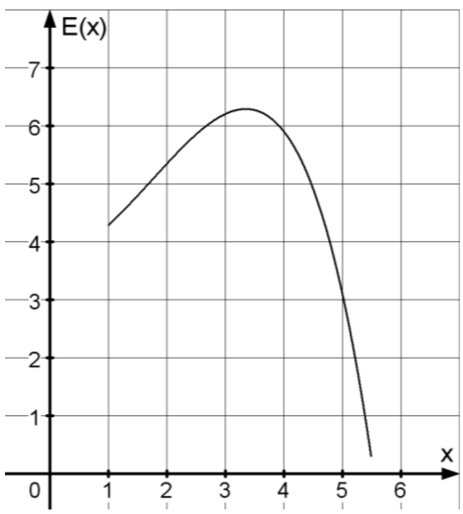
4.3 Zeichnen Sie im angegebenen Definitionsbereich den Graphen G(B) mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Platzbedarf: $0 \leq x \leq 5{,}5$; $0 \leq y \leq 14$). — **6**

Maßstab: 1 cm auf der x-Achse ≙ 500 Umdrehungen pro Minute
1 cm auf der y-Achse ≙ 1 Liter

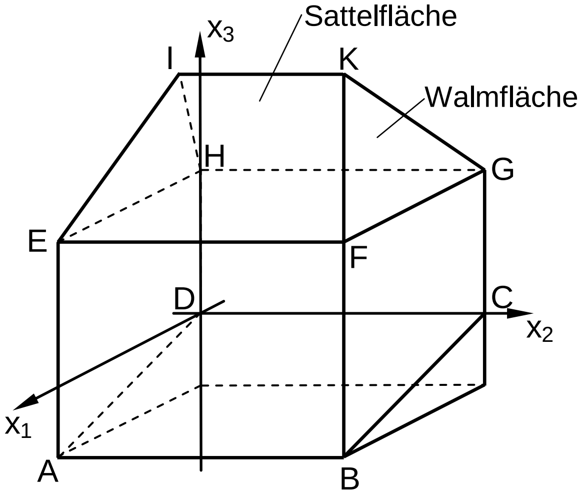
4.4.0 Die Funktion D mit dem Term $D(x) = -0{,}1(x-2)^2 + 12$ beschreibt für $x \in [1; 5{,}5]$ näherungsweise das Drehmoment (in 10 Nm) des Motors.

4.4.1 Zeichnen Sie im angegebenen Definitionsbereich den Graphen G(D) in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 4.3 und ermitteln Sie mit Hilfe der Graphen den Benzinverbrauch und das Drehmoment für die Drehzahlen 2000 min^{-1} und 4000 min^{-1}. — **3**

4.4.2 Die Effektivität E des Motors ergibt sich aus der Differenz E(x) = D(x) – B(x). Nebenstehendes Diagramm zeigt den Graphen der Funktion E für $x \in [1; 5{,}5]$. Entnehmen Sie dem Diagramm näherungsweise den Wert x_0, für den die Effektivität E des Motors am größten ist. Berechnen Sie näherungsweise $E'(x_0)$ und bestätigen Sie, dass es sich um ein Maximum handelt. Geben Sie für x_0 die Drehzahl, den Benzinverbrauch und das Drehmoment an. — **6**



Summe	25

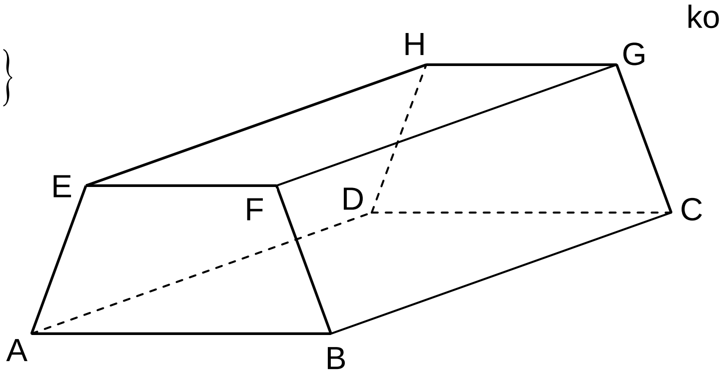
Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Die rechts abgebildete Skizze zeigt ein Haus mit der Grundform eines Quaders und einem Dach, das als Walmdach ausgeführt ist. Das Haus ist in einen Hang hineingebaut. Die Punkte A, B, C und D liegen in der Hangebene.  Für die Einheiten auf den drei Koordinatenachsen gilt jeweils: 1 LE $\widehat{=}$ 1 m. Die Maße des Hauses sind durch die Koordinaten folgender Punkte gegeben: A(8; 0; –3), B (8; 10; –3), D(0; 0; 0), E(8; 0; 4), H(0; 0; 4), I(4; 2; 8) und K(4; 8; 8). Der Punkt L(4; –6; –1,5) ist der Fußpunkt eines 13 m hohen Mastes mit der Spitze S. Der Mast steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene. Bei nachfolgenden Rechnungen soll auf die Mitführung von Einheiten verzichtet werden.	
5.1	Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Hangebene ABCD. [Ergebnis: E_{Hang}: $3x_1 + 8x_3 = 0$]	4
5.2	Berechnen Sie den Winkel der Hangebene mit der x_1x_2-Ebene.	3
5.3	Berechnen Sie die Flächenmaßzahlen der Walmfläche EHI und der Sattelfläche EFKI. Hinweis: Die Sattelfläche besitzt die Form eines gleichschenkligen Trapezes.	6
5.4	Ermitteln Sie denjenigen Punkt auf der Dachfläche EHI, der der Spitze S des Mastes am nächsten liegt.	6
5.5	Bearbeiten Sie das Beiblatt!	

Name: ______________________________ **Bitte geben Sie dieses Blatt wieder ab!**

5.5	Die Raumbilder zeigen drei Prismen. Das Trapez ABFE ist gleichschenklig und seine Grund- und Decklinie sind zueinander parallel. Das Trapez ABFE ist parallel und deckungsgleich zum Trapez DCGH. Gegeben sind drei Vektormengen. Zeichnen Sie die Vektoren jeder Menge in das jeweils danebenstehende Raumbild ein und kreuzen Sie an, welche Eigenschaft die Vektoren der angegebenen Mengen haben (Hinweis: Es ist jeweils nur eine Aussage zu jeder Vektormenge richtig).	6

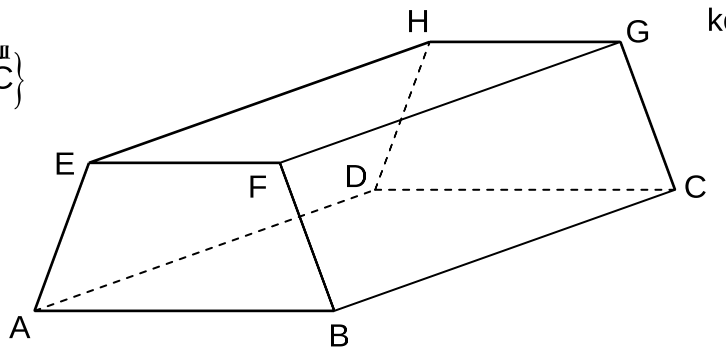
Vektormengen | Raumbilder | Eigenschaften

$\left\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{HD}; \overrightarrow{EG}\right\}$



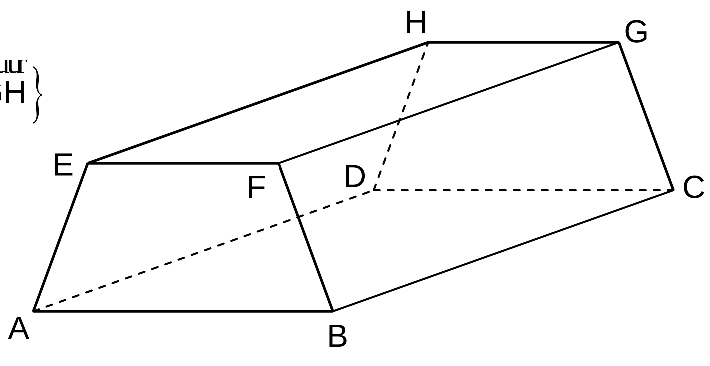
komplanar ☐ linear unabhängig ☐

$\left\{\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{GE}; \overrightarrow{AC}\right\}$



kollinear ☐ komplanar ☐

$\left\{\overrightarrow{FE}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{GH}\right\}$



kollinear ☐ linear unabhängig ☐

Summe	25

Bitte geben Sie dieses Blatt wieder ab!