Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2012

Prüfungsfach:	Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 21. Juni 2012
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; zugelassene Formelsammlung

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

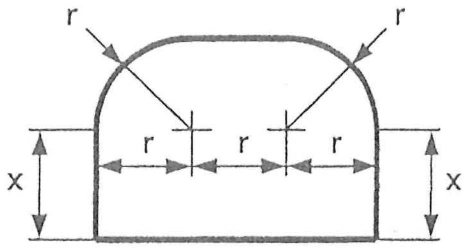
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

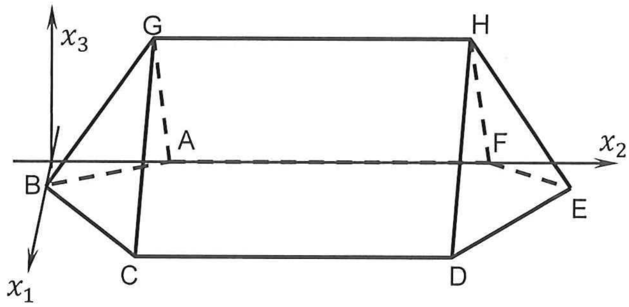
Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-4}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(f)$. Der Graph der Funktion f in einem rechtwinkligen Koordinatensystem heißt $G(f)$.	
1.1	Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und die Nullstelle der Funktion f.	3
1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Umgebung der Definitionslücke $x = 2$ sowie für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$. Geben Sie die Gleichungen der beiden senkrechten Asymptoten sowie der waagerechten Asymptote von $G(f)$ an.	5
1.3	Zeigen Sie, dass der Graph $G(f)$ der Funktion f keinen Extrempunkt besitzt.	4
1.4	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen $G(f)$ im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. [Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE $\triangleq$ 2 cm]	5
1.5.0	Betrachten Sie für die folgende Integration den Graphen im Bereich $-2 < x < 2$:	
1.5.1	Zeigen Sie, dass F: $x \mapsto \frac{1}{4} ln(x+2) + \frac{3}{4} \ln(2-x)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.	4
1.5.2	Die x–Achse, der Graph $G(f)$ sowie die senkrechte Gerade $x = 1{,}2$ schließen ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie diese Fläche in der Zeichnung aus der Teilaufgabe 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl der Fläche auf eine Nachkommastelle genau.	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $h: x \longmapsto \dfrac{x}{ln(2x) - 1}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(h)$. Der Graph der Funktion h in einem kartesischen Koordinatensystem heißt $G(h)$.	
2.1	Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^+ \setminus \{0{,}5e\}$ die Definitionsmenge $D(h)$ der Funktion h ist.	2
2.2	Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $h(x)$ an allen Rändern ihres Definitionsbereiches und geben Sie die Gleichung der senkrechten Asymptote von $G(h)$ an.	5
2.3	Bestimmen Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von $G(h)$. $\left[\text{Teilergebnis: } h'(x) = \dfrac{ln(2x) - 2}{[ln(2x) - 1]^2}\right]$	6
2.4	Zeigen Sie, dass der Graph $G(h)$ einen Wendepunkt besitzt und ermitteln Sie seine Koordinaten.	3
2.5	Geben Sie das Verhalten der Steigung des Graphen $G(h)$ für $x \longrightarrow 0$ an. Erläutern Sie, wie Sie den entsprechenden Grenzwert ermitteln.	3
2.6	Berechnen Sie die Funktionswerte $h(1)$, $h(2)$ und $h(6)$ und zeichnen Sie den Graphen $G(h)$ für $0 < x \leq 12$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. Zeichnen Sie auch die senkrechte Asymptote ein. [Maßstab: 1 LE $\triangleq$ 1 cm]	6
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	In einer Glockengießerei wird eine Zinn-Bronze zum Gießen von Kuhglocken hergestellt. Dazu werden 78 % Kupfer und 22 % Zinn geschmolzen und in Formen gegossen. Der Gießvorgang erstreckt sich vom Einfüllen des Metalls in den vorgeheizten Ofen bis zum gegossenen, abgekühlten Produkt. Die Funktion T beschreibt näherungsweise den Temperaturverlauf während des Gießvorgangs: $T(t) = 3000 \cdot t \cdot e^{-t} + 20$ mit $0 \leq t \leq 10$ T ist die Temperatur in °C, gerundet auf ganze Zahlen, t die Zeit in Tagen. Der Graph von T wird mit $G(T)$ bezeichnet. Auf das Mitführen der Einheiten kann verzichtet werden.	
3.1	Bestimmen Sie die Anfangstemperatur des Materials sowie die Temperatur nach 12 Stunden.	2
3.2	Geben Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von $G(T)$ an und erläutern Sie die Bedeutung dieses Punktes im Gießvorgang. Untersuchen Sie, ob es sich dabei im Intervall [0; 10] um einen absoluten Extrempunkt handelt. [Teilergebnis: $T'(t) = 3000 \cdot (1-t) \cdot e^{-t}$]	7
3.3	Erstellen Sie eine Wertetabelle im Bereich $0 \leq x \leq 8$ und zeichnen Sie $G(T)$ im angegebenen Bereich in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Verwenden Sie einen geeigneten Maßstab.	6
3.4	Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt t_0 die Temperaturabnahme am größten ist.	3
3.5	Im Ofen werden 820 kg Bronze für den Guss von 220 gleichen Kuhglocken erhitzt. Der Verlust beim Gießen beträgt 0,5 %. Berechnen Sie die Gesamtmasse sowie jeweils die Masse des Kupfer- und Zinn-Anteils einer Glocke in kg.	3
3.6	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion T für $t \to \infty$ (die Temperatur der Bronze wird nach dem Gießvorgang weiter registriert) und deuten Sie das Ergebnis in Bezug auf die Bronze. Geben Sie die Gleichung der Asymptote an.	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	Es soll eine zweigleisige U-Bahnhaltestelle gemäß beigefügter Skizze geplant werden. Der Querschnitt der Haltestelle lässt sich vereinfacht darstellen mit Hilfe eines Rechtecks der Höhe x und einem darüber liegenden, an den Seiten durch Viertelkreise abgerundeten Gewölbe.  Maßeinheiten sollen bei den nachfolgenden Teilaufgaben nicht mitgeführt werden.	
4.1	Bestimmen Sie, unter Einbeziehung des Haltestellenbodens, den Term für den Umfang $U(r,x)$ der zweigleisigen U-Bahnhaltestelle in Abhängigkeit von r und x. [Mögliches Ergebnis: $U(r,x) = 2x + 4r + \pi r$]	2
4.2	Aus Kostengründen ist der Umfang U des Querschnitts nach der Genehmigung fest vorgegeben. Ermitteln Sie den Term $A(r)$ für die Berechnung der Querschnittsfläche in Abhängigkeit von r. Geben Sie auch einen im Anwendungsbezug sinnvollen Definitionsbereich an. $\left[\text{Teilergebnis: } A(r) = \frac{3}{2}rU - 5r^2 - \pi r^2; \text{näherungsweise: } D(A) =]0;\ 0{,}14\,U]\right]$	7
4.3	Die Querschnittsfläche $A(r)$ soll maximal werden. Berechnen Sie das Maximum $A_{\max}$ von $A(r)$ sowie die dazugehörigen Maßzahlen r und x in Abhängigkeit von U. $\left[\text{Teilergebnisse: } r = \frac{3U}{4\,(5+\pi)}\,; A_{\max} = \frac{9U^2}{16(5+\pi)}\right]$	7
4.4.0	Der konstante Umfang U wird im Folgenden mit 65 [m] angenommen.	
4.4.1	Berechnen Sie für $1 \leq r \leq 9$ mit $\Delta r = 1$ auf ganze Zahlen gerundete Werte für die Querschnittsfläche $A(r)$ und zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen $G(A)$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Wählen Sie einen geeigneten Maßstab.	5
4.4.2	Das Bauamt hat sich auf eine Haltestelle mit der Querschnittsfläche $A_1 = 250$ [m²] festgelegt. Berechnen Sie, für welche Radien r sich die Querschnittsfläche A_1 ergibt und um wie viel Prozent A_1 von $A_{\max}$ abweicht. Geben Sie die Ergebnisse jeweils auf eine Nachkommastelle genau an.	4
	Summe:	25

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Markus besitzt ein Zelt mit sechseckiger Grundfläche (siehe Abbildung). Die unten angegebenen Punkte legen das Zelt in einem kartesischen Koordinatensystem fest. Dabei gilt: 1LE ≙ 1dm. Die Rechnungen in den folgenden Aufgaben sollen ohne Einheiten durchgeführt werden. $A\,(0\|\,8\|\,0)$, $B\,(10\|\,0\|\,0)$ $C\,(20\|\,8\|\,0)$, $D\,(20\|\,28\|\,0)$ $E\,(10\|\,36\|\,0)$, $F\,(0\|\,28\|\,0)$ $G\,(10\|\,8\|\,14)$, $H(10\|\,28\|\,14)$ 	
5.1	Markus will mit seinem Kombi und dem Zelt in den Urlaub fahren. Zuvor muss er den Reißverschluss seines Zelts zwischen G und B erneuern. Berechnen Sie die Längenmaßzahl des Reißverschlusses.	2
5.2	Das Dreieck BGC legt eine Ebene E_1 fest. Berechnen Sie die Maßzahl der Dreiecksfläche BGC und stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in Normalenform auf. [Mögliches Ergebnis: $E_1\colon 28x_1 - 35x_2 + 20x_3 - 280 = 0$].	5
5.3	Bestimmen Sie den Winkel, den die Ebene E_1 mit der x_1x_2-Ebene einschließt.	3
5.4	Berechnen Sie den Rauminhalt des Zeltes. **Hinweis:** Das Zelt besitzt mehrere Symmetrieebenen, welche durch die Koordinaten der Punkte überprüft werden können. Sie dürfen diesen Umstand ohne Nachweis nutzen.	5
5.5	Für den „gefühlten" Platz im Zelt ist es wichtig, welchen Abstand ein auf der Geraden BE liegender Mensch zur Zeltwand hat. Zeigen Sie hierfür, dass die Gerade BE parallel verläuft zur Ebene $E_2\colon 7x_1 + 5x_3 - 140 = 0$, welche die Punkte G, C, D und H enthält (Nachweis nicht notwendig). Berechnen Sie damit den Abstand der Geraden BE zur Seitenfläche GCDH.	5
5.6	Bei schlechtem Wetter übernachtet Markus lieber in seinem Kombi. Das Fahrrad hat dann aber keinen Platz mehr im Kombi. Hätte es im Zelt stehend Platz, wenn der Lenker in 1m Höhe befestigt und 60cm breit ist? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.	5
	Summe:	25