Ergänzungsprüfung

zum Erwerb der Fachhochschulreife 2013

Prüfungsfach:	Mathematik (technische Ausbildungsrichtung)
Prüfungstag:	Donnerstag, 20. Juni 2013
Prüfungsdauer:	9:00 – 12:00 Uhr
Hilfsmittel:	Elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner; zugelassene Formelsammlung

Hinweise:

Der Bereich Analysis besteht aus vier Aufgaben.

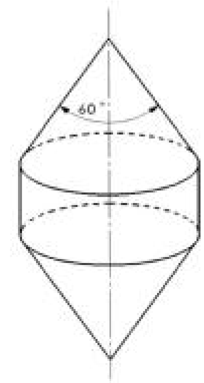
Die Schülerinnen und Schüler haben daraus drei Aufgaben zu bearbeiten.

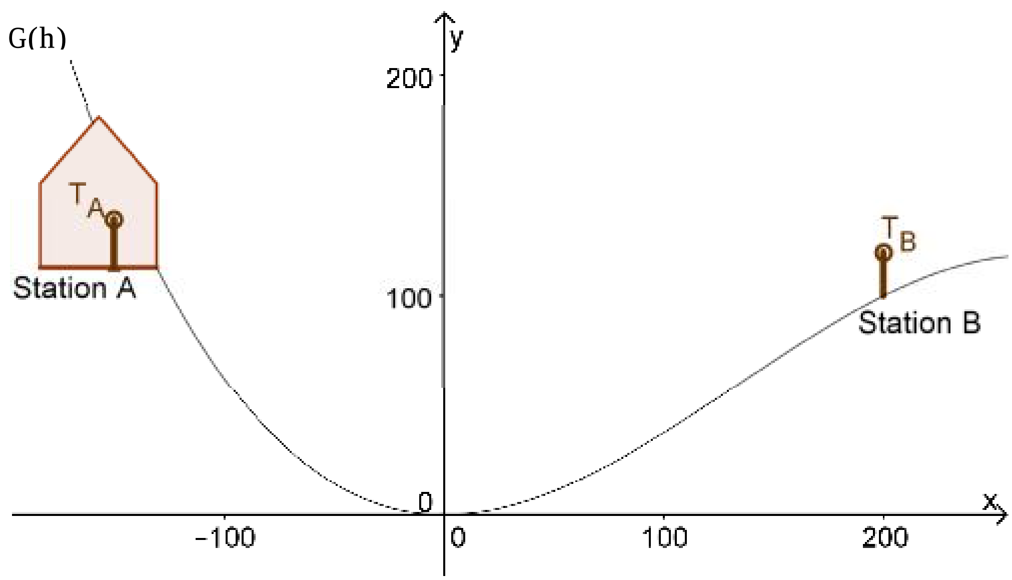
Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Die Aufgabe Analytische Geometrie ist von allen Schülern zu bearbeiten.

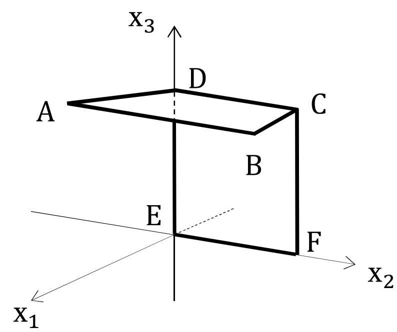
Analysis: Aufgabe 1		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f\colon x \mapsto \dfrac{6(1-x)}{(x+1)^2}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(f) \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem heißt $G(f)$.	
1.1	Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und geben Sie die Schnittpunkte von $G(f)$ mit den Koordinatenachsen an.	3
1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f in der Umgebung der Definitionslücke und für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von $G(f)$ an.	4
1.3	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen $G(f)$ und schließen Sie daraus auf die Art des Extremums. Ermitteln Sie auch die Koordinaten des Extrempunktes. $\left[\text{Teilergebnis: } f'(x) = \dfrac{6x-18}{(x+1)^3}\right]$	6
1.4	Skizzieren Sie $G(f)$ und die dazugehörigen Asymptoten im Bereich $-8 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie dabei Ihre bisherigen Ergebnisse sowie die Funktionswerte für $x = -6$ und $x = 6$. [Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE ≙ 0,5 cm]	5
1.5.0	Betrachten Sie für die folgende Integration den Graphen im Bereich $x \geq 0$:	
1.5.1	Zeigen Sie, dass $F\colon x \mapsto \dfrac{-12}{x+1} - 6\ln(x+1)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.	3
1.5.2	Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ auf zwei Nachkommastellen genau und beschreiben Sie die geometrische Bedeutung des Ergebnisses.	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 2		BE
2.0	Gegeben sind die Funktionen $f\colon x \mapsto 4(x+2)\,e^{-\frac{1}{2}x}$ und $g\colon x \mapsto -4\,x\,e^{-\frac{1}{2}x}$ in der maximalen Definitionsmenge $D(f) = IR$. Ihre Graphen werden mit G(f) und G(g) bezeichnet.	
2.1	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ und geben Sie die Gleichung der Asymptote an.	3
2.2	Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extremums der Funktion f. [Teilergebnis: $f'(x) = -2\,x\,e^{-\frac{1}{2}x}$]	4
2.3	Zeigen Sie, dass die Wendetangente w des Graphen G(f) die x-Achse im Punkt $S(6\|0)$ schneidet.	5
2.4.1	Erstellen Sie im Bereich $-2 \leq x \leq 7$ eine gemeinsame Wertetabelle für die Funktionen f und g. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.	3
2.4.2	Zeichnen Sie die beiden Graphen G(f) und G(g) in ein gemeinsames Koordinaten-system. [Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE ≙ 1 cm]	4
2.5.1	Zeigen Sie, dass die Differenz der Funktionen f und g durch den Term $d(x) = 2(4x+4)\,e^{-\frac{1}{2}x}$ beschrieben werden kann.	2
2.5.2	Die beiden Graphen G(f) und G(g) schließen zusammen mit der y-Achse und der Geraden $x = 1$ das Flächenstück A ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung der Teilaufgabe 2.4.2 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts A auf zwei Nachkomma-stellen genau. Benutzen Sie dabei folgenden Hinweis: Die Funktion $H(x) = -8(x+2)\,e^{-\frac{1}{2}x}$ ist Stammfunktion der Funktion $h(x) = 4\,x\,e^{-\frac{1}{2}x}$. [Nachweis nicht erforderlich!]	4
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 3		BE
3.0	Eine Ankerboje aus Edelstahl dient zum Festmachen von Booten auf einem See. Sie besteht aus einem geraden Kreiszylinder, der an seinen beiden Enden durch gerade Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel $\varphi = 60°$ abgeschlossen ist (siehe Skizze). Das Volumen der gesamten Boje beträgt 10 Liter. Die Wandstärke wird vorerst nicht berücksichtigt.  Die Ergebnisse können auf zwei Nachkommastellen gerundet werden. Für die Aufgaben 3.1 bis 3.4 wird auf die Angabe von Einheiten verzichtet.	
3.1	Bestimmen Sie die gesamte Oberfläche $O_{ges}(r)$ der Boje in Abhängigkeit vom Radius r. Definitionsmenge: $D(r) =]0; 3]$ $\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } O_{ges}(r) = \left(4 - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\pi r^2 + \frac{20}{r}\right]$	7
3.2	Bestimmen Sie das Verhalten von $O_{ges}(r)$ an den Rändern des Definitionsbereichs.	2
3.3	Bestimmen Sie den Radius r_0 so, dass möglichst wenig Edelstahl benötigt wird. Berechnen Sie für diesen Radius r_0 Oberfläche und Gesamthöhe der Boje. $\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } r_0 = \sqrt[3]{\frac{10}{\left(4 - \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\pi}}\right]$	7
3.4	Erstellen Sie eine Wertetabelle für $O_{ges}(r)$ im Definitionsbereich unter Verwendung bisheriger Ergebnisse mit der Schrittweite $\Delta r = 0{,}5$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $O_{ges}(r)$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie einen geeigneten Maßstab.	5
3.5.1	Zur Herstellung der Boje wird Edelstahlblech mit einer Dichte von $\rho_S = 7{,}9\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ verwendet. Die Dicke des Bleches beträgt $d = 3$ mm. Bestimmen Sie für den Radius r_0 das Gesamtgewicht in kg. Hinweis: $V \approx O \cdot d$	2
3.5.2	Eine andere Boje mit den gleichen Abmessungen liegt genau bis zur Hälfte im Wasser. Berechnen Sie die Dicke des Bleches dieser Boje. Hinweis: Dichte des Wassers: $\rho_W = 1{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$	2
	Summe:	25

Analysis: Aufgabe 4		BE
4.0	In einem Tal wollen Bergbauern zum Heutransport von einer zur anderen Talseite eine Lastenseilbahn errichten. Das Profil des Hangverlaufs, dargestellt in der Abbildung als Graph G(h), wird näherungsweise durch den Funktionsterm $h(x) = -\frac{1}{80\,000}x^3 + \frac{1}{200}x^2$ beschrieben. Das Tragseil der Seilbahn ist bei den beiden Stationen A und B in den Punkten $T_A(-150\|153)$ und $T_B(200\|103)$ befestigt. Die Koordinaten geben die Lage der Punkte in Metern an. Zur Berechnung können Einheiten weggelassen werden.  (Keine maßstabsgetreue Skizze)	
4.1	Berechnen Sie die Hangneigung an der Seilbahnstation B. [Teilergebnis: Der Wert der Steigung beträgt 0,5.]	3
4.2	Damit die Bahngondel ungehindert in die Station B ein- und ausfahren kann, muss der Fixierungspunkt des Tragseils ausreichend Abstand zum Boden besitzen. Bestimmen Sie den senkrechten Abstand des Befestigungspunkts T_B zum Hang in Metern.	3

4.3	Der Verlauf des Tragseils der Seilbahn kann annähernd durch eine quadratische Funktion mit dem Term $s(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in IR$ und $x \in [-150; 200]$ beschrieben werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion s unter den beiden Bedingungen, dass 1. das Tragseil an den Punkten T_A und T_B befestigt ist und 2. die Steigung des Tragseils mit der Steigung des Hangs an der Station B übereinstimmt. $\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } s(x) = \frac{1}{4\,900}(9\,x^2 - 1\,150\,x + 374\,700)\right]$	7
4.4	Das Tragseil der Seilbahn darf in Station A aus technischen Gründen eine maximale Neigung von 40^0 nicht überschreiten. Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Bedingung eingehalten wird.	4
4.5.1	Stellen Sie den Term $a(x)$ mit $x \in [-150; 200]$ für eine Funktion auf, die den senkrechten Abstand des Tragseils zum Profil des Hangverlaufs beschreibt. $\left[\text{Mögliches Teilergebnis: } a(x) = \frac{1}{80\,000}x^3 - \frac{31}{9\,800}x^2 - \frac{1\,150}{4\,900}x + \frac{374\,700}{4\,900}\right]$	2
4.5.2	Bestimmen Sie den maximalen senkrechten Abstand a_{max} des Tragseils zum Hangverlauf.	6
	Summe:	25

Analytische Geometrie: Aufgabe 5		BE
5.0	Die Abbildung zeigt den Plan eines Unterstellhäuschens für eine Bushaltestelle. Die Dachfläche hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Die x_1x_2-Ebene des kartesischen Koordinatensystems entspricht dem waagerechten Boden. Die x_3-Achse verläuft senkrecht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 cm.  Folgende Punkte sind gegeben: $A(16\|-4\|25)$, $B(16\|36\|25)$, $C(0\|32\|24)$, $D(0\|0\|24)$, $E(0\|0\|0)$, $F(0\|32\|0)$	
5.1	Am Schnittpunkt M der Diagonalen des Daches soll eine Lampe montiert werden. Berechnen Sie die Koordinaten von M.	5
5.2	Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E_1, in der das Dach ABCD liegt. Geben Sie die Gleichung in Normalenform an. [Mögliches Ergebnis: E_1: $x_1 - 16x_3 + 384 = 0$]	4
5.3	Um zu gewährleisten, dass das Wasser ausreichend abfließt, ist eine Dachneigung von mindestens 3° vorgesehen. Überprüfen Sie, ob diese Vorgabe eingehalten wird.	3
5.4	Das Dach soll mit zwei geraden Streben abgestützt werden. Die Streben verlaufen senkrecht zur Dachfläche, d. h. schräg zum Boden. Sie sind in den Punkten A bzw. B am Dach befestigt und reichen bis zum Boden. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die Streben den Boden (x_1x_2–Ebene) erreichen und ermitteln Sie die Länge der Streben auf Millimeter genau.	6
5.5	In einer Ebene E_2, die in einem Abstand von 10 cm parallel über der Dachfläche verläuft, sollen Solarzellen installiert werden. Bestimmen Sie eine Gleichung von E_2.	3
5.6	Berechnen Sie die Fläche am Boden, die durch das Dach vor dem Regen geschützt wird, wenn der Regen genau senkrecht fällt.	4
	Summe:	25

Bewertungsschlüssel:

BE = Bewertungseinheiten	100 - 86	85 - 71	70 - 56	55 - 41	40 - 21	20 - 0
Note	1	2	3	4	5	6