Abschlussprüfung Telekolleg/14

Fach: Mathematik am 21.Juni 2008 **Arbeitszeit: 180 Minuten**

Name des Prüflings: ____________________________

Maximale Punktzahl: 100 Erreichte Punktzahl: _____

Note: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

Taschenrechner (netzunabhängig, nicht programmierbar, nicht grafikfähig)
Formelsammlung

Aufgabenstellung:

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe I BE

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k: x \mapsto f_k(x)$ mit

$$f_k(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 + kx^2 + 15x + 25\right) \text{ mit } D_{f_k} = \mathbf{R} \text{ und } k \in \mathbf{R}.$$

1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W_k des Graphen von f_k in 6
Abhängigkeit von k. (Teilergebnis: $x_W = -\frac{k}{3}$)

1.2 Berechnen Sie die Parameter k so, dass die Tangente an den zugehörigen 4
Graphen von f_k im Wendepunkt W_k die Steigung $m = -1{,}5$ hat.

1.3.0 Für alle weiteren Teilaufgaben gilt $k = -9$. Die Funktion f_{-9} wird nun mit f und ihr Graph mit G bezeichnet. Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(x^3 - 9x^2 + 15x + 25\right).$$

1.3.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = 5$ eine Nullstelle der Funktion f ist und untersuchen Sie 6
die Funktion f auf weitere Nullstellen.
Geben Sie den Schnittpunkt von G mit der y–Achse an.

1.3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extrempunkte des 6
Graphen G.

1.3.3 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle in denen der Graph G rechts- bzw. 4
linksgekrümmt ist.

1.3.4 Zeichnen Sie den Graphen G im Bereich $-1{,}5 \le x \le 7$ unter Verwendung der 4
bisherigen Ergebnisse und mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Koordinatenachsen: 1 LE = 1cm

1.3.5 Der Graph G und die x–Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Kenn- 6
zeichnen Sie dieses Flächenstück im Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3.4 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes.

Fortsetzung nächste Seite!

2.0 Gegeben ist die Folge $h_n: n \mapsto \frac{4n+1}{2n-1}$ mit $n \in \{1; 2; 3;.....\}$.

2.1 Berechnen Sie die ersten 5 Glieder dieser Folge und stellen Sie diese in ei- 4
nem kartesischen Koordinatensystem dar.

2.2 Bestimmen Sie für $n \to \infty$ den Grenzwert der Folge h_n. 2

2.3 Zeigen Sie, dass die Folge h_n monoton abnimmt. 5

2.4.0 Die Definitionsmenge der Folge h_n wird auf die maximal zulässige Definitionsmenge $D_h \subset \mathbf{R}$ erweitert. Dadurch wird aus der Folge h_n die Funktion $h: x \mapsto h(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$ mit $x \in D_h$. Der Graph der Funktion h in einem kartesischen Koordinatensystem heißt H.

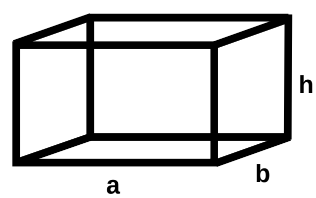
2.4.1 Geben Sie die Definitionsmenge D_h an. 2

2.4.2 Untersuchen Sie rechnerisch das Verhalten der Funktion h in der Umgebung 5
der Definitionslücke und geben Sie die Art der Definitionslücke an.

2.4.3 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen H an. 2

2.4.4 Berechnen Sie die Funktionswerte h(0) und h(1) und zeichnen Sie den Gra- 6
phen H sowie die Asymptoten im Bereich $-5 \le x \le 5 \wedge x \in D_h$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Koordinatenachsen: 1 LE = 1cm

3.0 Das Kantengerüst einer quaderförmigen Kiste soll aus Winkeleisen gefertigt werden. Für sämtliche zwölf Kanten stehen 3 m Winkeleisen zur Verfügung. Die Grundkante a der Kiste muss aus technischen Gründen dreimal so lang wie die Grundkante b sein (siehe Skizze). Für die folgenden Teilaufgaben wird auf die Mitführung von Einheiten verzichtet.



3.1 Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(b) der Kiste in Abhängigkeit der Grund- 7
kante b dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion V an.
(Teilergebnis: $V(b) = \frac{9}{4}b^2 - 12b^3$)

3.2 Berechnen Sie denjenigen Wert von b, für den die Volumenmaßzahl V(b) 6
der Kiste den absolut größten Wert annimmt und geben Sie diesen Wert an.

Summe Aufgabe I 75

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe II		BE
1.0	Gegeben sind die Punkte $A_a(a; 2; 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $B(3; 3; 2)$ und $C(-1; 2; 2)$ sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.	
1.1	Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h, die durch die Punkte B und C verläuft.	2
1.2	Zeigen Sie, dass die Gerade h echt parallel zur Geraden g verläuft.	3
1.3	Bestimmen Sie a so, dass das zugehörige Dreieck A_aBC bei A_a einen rechten Winkel hat. (Ergebnis: a = 1)	6
1.4.0	Für die folgenden Teilaufgaben gilt: a = 1.	
1.4.1	Berechnen Sie die Länge der Vektoren $\overrightarrow{A_1B}$ und $\overrightarrow{A_1C}$ und bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes des Dreiecks A_1BC.	5
1.4.2	Ermitteln Sie alle Innenwinkel des Dreiecks A_1BC.	5
1.4.3	Der Punkt D ergänzt das Dreieck A_1BC zum Rechteck A_1BDC. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.	2
1.4.4	Das Rechteck A_1BDC liegt in der Ebene e. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene e in Parameterform.	2
	Summe Aufgabe II	25
	Gesamt	100