Abschlussprüfung Telekolleg/14

Fach: Mathematik

Lösungsvorschlag

Termin: 21.Juni 2008 Arbeitszeit: 180 Minuten

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Lösungshinweise Aufgabe I</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>

$f_k'(x)=\frac{1}{8}(3x^2+2kx+15);\ f_k''(x)=\frac{1}{8}(6x+2k);\ f_k'''(x)=\frac{3}{4};$

$f_k''(x)=0\Rightarrow 6x+2k=0\Rightarrow x_0=-\frac{k}{3};\ f_k'''(-\frac{k}{3})=\frac{3}{4}\neq 0\Rightarrow W$

$f_k(-\frac{k}{3})=\frac{1}{8}\left(-\frac{k^3}{27}+k\frac{k^2}{9}-15\frac{k}{3}+25\right)=\frac{k^3}{108}-\frac{5k}{8}+\frac{25}{8};\ W_k(-\frac{k}{3};\ \frac{k^3}{108}-\frac{5k}{8}+\frac{25}{8})$

</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>

$f_k'(-\frac{k}{3})=-1{,}5\Rightarrow\frac{1}{8}\left(\frac{k^2}{3}-\frac{2k^2}{3}+15\right)=-1{,}5\Rightarrow-\frac{k^2}{24}+\frac{15}{8}=-1{,}5\Rightarrow k_1=9;\ k_2=-9$

</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1.3.1</td><td>

$S_y(0;\ \frac{25}{8});\ f(5)=0;\ (x^3-9x^2+15x+25):(x-5)=x^2-4x-5$

$x^2-4x-5=0\Rightarrow x_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}\Rightarrow x_2=5;\ x_3=-1$

</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1.3.2</td><td>

$f'(x)=\frac{1}{8}(3x^2-18x+15);\ f''(x)=\frac{1}{8}(6x-18);$

$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{8}(3x^2-18x+15)=0\Rightarrow x^2-6x+5=0\Rightarrow x_2=5;\ x_4=1$

$f''(1)=-\frac{12}{8}<0\Rightarrow H(1;\ 4);\ f''(5)=\frac{12}{8}>0\Rightarrow T(5;\ 0)$

</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1.3.3</td><td>

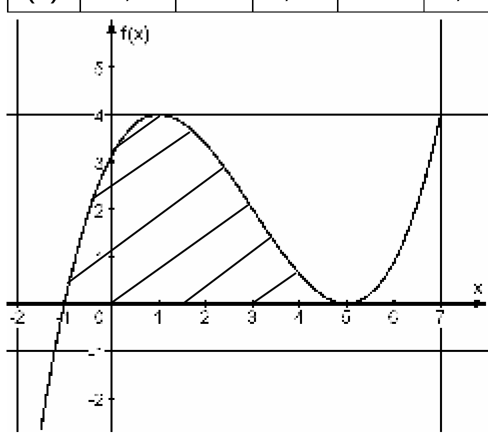
$f''(x)=0\Rightarrow\frac{1}{8}(6x-18)=0\Rightarrow x_5=3$

$f''(x)<0$ für $x<3$; d.h. G ist rechtsgekrümmt für $x\in\,]-\infty;3]$

$f''(x)>0$ für $x>3$; d.h. G ist linksgekrümmt für $x\in[3;+\infty[$

</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1.3.4</td><td>

x	–1,5	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	–2,64	0	3,13	4	3,38	2	0,63	0	0,88	4

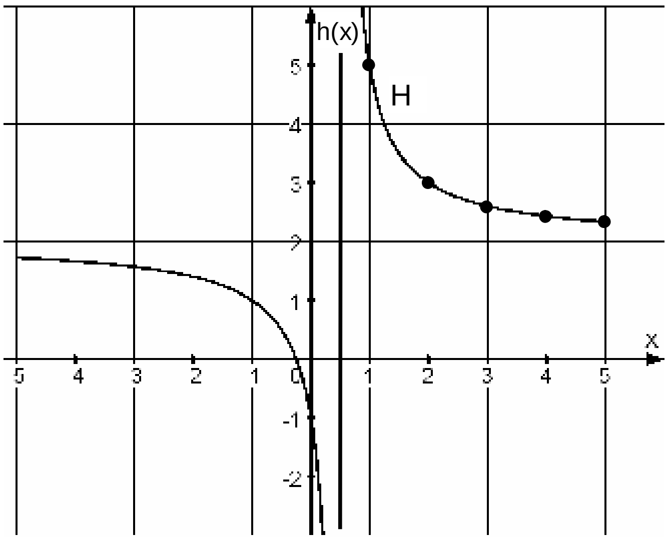


</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1.3.5</td><td>

$A=\int_{-1}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{8}(x^3-9x^2+15x+25)\right)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+15\frac{x^2}{2}+25x\right]_{-1}^{5}=$

$=\frac{1}{8}\left[\frac{5^4}{4}-3\cdot5^3+15\frac{5^2}{2}+25\cdot5-(\frac{(-1)^4}{4}-3(-1)^3+15\frac{(-1)^2}{2}-25)\right]=\frac{1}{8}108=13{,}5$

</td><td>6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2.1
2.4.4</td><td>
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>h(n)</td><td>5</td><td>3</td><td>2,6</td><td>2,43</td><td>2,33</td></tr>
</table>


</td><td>4
5</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(4+\frac{1}{n})}{n(2-\frac{1}{n})}=2$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>Annahme: h_n ist monoton fallend: $\frac{4n+1}{2n-1}\geq\frac{4(n+1)+1}{2(n+1)-1}\Rightarrow 1>-5$ (w)</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2.4.1</td><td>$D_h = \mathbf{R}\backslash\{\,0,5\,\}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.4.2</td><td>$\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0,5}} h(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4(0,5-h)+1}{2(0,5-h)-1}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3-4h}{-2h}=-\infty$
$\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0,5}} h(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4(0,5+h)+1}{2(0,5+h)-1}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3+4h}{+2h}=\infty$
x = 0,5 ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel</td><td>5</td></tr>
<tr><td>2.4.3</td><td>Asymptoten x = 0,5 und y = 2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.4.4</td><td>h(0) = –1; h(1) = 5; Graph siehe Teilaufgabe 2.1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>$V_Q = 3b\cdot b\cdot h = 3b^2h$ mit $4b+4\cdot 3b+4h=3\Rightarrow h=\frac{3}{4}-4b$
$V(b)=3b^2(\frac{3}{4}-4b)=\frac{9}{4}b^2-12b^3$; $D_V = \left]0;\frac{3}{16}\right[$</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$V'(b)=\frac{9}{2}b-36b^2$; $V'(b)=0\Rightarrow 9b(\frac{1}{2}-4b)=0\Rightarrow b_1=0\notin D_V$; $b_2=\frac{1}{8}$
$V''(b)=\frac{9}{2}-72b$; $V''(\frac{1}{8})=-\frac{9}{2}<0\Rightarrow$ rel. Maximum$(\frac{1}{8};\frac{3}{256})$
$\lim\limits_{\substack{>\\b\to 0}} V(b)=0$; $\lim\limits_{\substack{<\\b\to\frac{3}{16}}} V(b)=0$; $V(\frac{1}{8})=\frac{3}{256}\approx 0{,}012\,(m^3)$ ist ein absolutes Maximum</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe I</td><td>75</td></tr>
</table>

Nr.	Lösungshinweise Aufgabe II	BE
1.1	h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbf{R}$	2
1.2	$\vec{u}_h = \begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix} = -\vec{u}_g \Rightarrow$ Richtungsvektoren $\vec{u}_h$ und $-\vec{u}_g$ der Geraden h und g sind linear abhängig $\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\mu = 1{,}25\\ \mu = 2\\ \ldots\ldots\end{cases} \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow B \notin g \Rightarrow$ g und h echt parallel	3
1.3	$\overrightarrow{A_aB} \circ \overrightarrow{A_aC} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}3-a\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1-a\\0\\2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ $(3-a)(-1-a)+4 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a_{1/2} = 1$	6
1.4.1	$\left\|\overrightarrow{A_1B}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+1+4} = 3;\ \left\|\overrightarrow{A_1C}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $A_{A_1BC} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{8} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$	5
1.4.2	Winkel bei A_1: $\alpha = 90°$ (siehe 1.3) Winkel bei B: $\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA_1} \circ \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\-1\\0\end{pmatrix}}{3\cdot\sqrt{17}} = \frac{9}{3\cdot\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \Rightarrow \beta = 43{,}31°$ Winkel bei C: $\gamma = 180° - 90° - 43{,}31° = 46{,}69°$	5
1.4.3	$\vec{d} = \vec{b} + (\vec{c} - \vec{a}_1) = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$; D(1; 3; 4)	2
1.4.4	e: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix};\ m, n \in \mathbf{R}$	2
	Summe Aufgabe II	25
	Gesamt	100