Abschlussprüfung Telekolleg/16

Fach: Mathematik

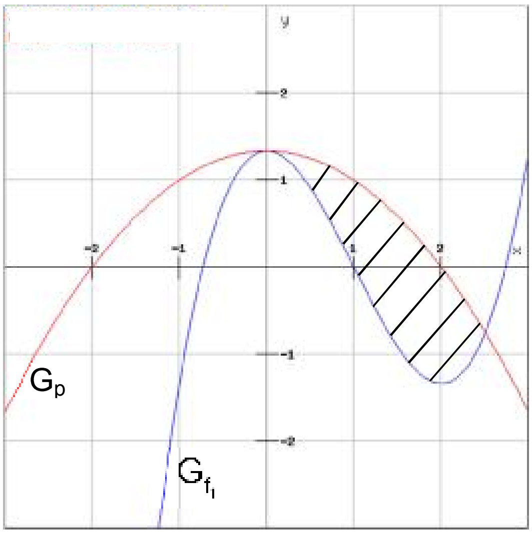
Lösungsvorschlag

Termin: 19. Mai 2012 Arbeitszeit: 180 Minuten

Lösungshinweise Aufgabe I		BE
1.1	$f_a'(x) = 2x^2 - 4ax$ $f_a'(x) = 0 \Rightarrow 2x(x-2a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2a \neq 0 \quad (a \in \mathbb{R}^+)$ $f_a''(x) = 4x - 4a$ $f_a''(0) = -4a < 0 \Rightarrow \text{HOP}\left(0; \frac{4}{3}a^3\right)$ beachte : $a \in \mathbb{R}^+$ $f_a''(2a) = 4a > 0 \Rightarrow \text{TIP}\left(2a; -\frac{4}{3}a^3\right)$ beachte : $a \in \mathbb{R}^+$	6
1.2	$g: y = -2x + 3 \Rightarrow m_g = m_t = -2 \Rightarrow f_a'(1) = -2 \Rightarrow 2 - 4a = -2 \Rightarrow a = 1$	3
1.3.1	$x_3 = 1;\ \ y_3 = 0$ $\frac{1}{3}\left(2x^3 - 6x^2 + 4\right) : (x-1) = \frac{1}{3}(2x^2 - 4x - 4)$ $\frac{1}{3}(2x^2 - 4x - 4) = 0 \Rightarrow x_{4/5} = 1 \pm \sqrt{3};\quad y_{4/5} = 0$ $x_1 = 0;\ \ y_1 = \frac{4}{3}$	6
1.3.2	$f_1'(x) = 2x^2 - 4x$ $f_1''(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_W = 1$ (einfache Nst.) $\Rightarrow$ VZW $\Rightarrow$ W(1; 0)	3
1.3.3 2.2	Wertetabelle (nicht verlangt): (Tabelle siehe unten) Zeichnung nicht maßstäblich!	6 3

Wertetabelle (nicht verlangt):

x	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$



Zeichnung nicht maßstäblich!

2.1	$y = ax^2 + bx + c$ $S(0;\frac{4}{3}) \Rightarrow c = \frac{4}{3}$ $\left.\begin{array}{l} p(2)=0 \Rightarrow 4a+2b+\frac{4}{3}=0 \\ p(-2)=0 \Rightarrow 4a-2b+\frac{4}{3}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b=0;\;\; a=-\frac{1}{3}$ $p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}$	4
2.3	$\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3} \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2x-5) = 0 \Rightarrow x_6 = 0;\;\; x_7 = 2{,}5$	3
2.4	$\int\limits_0^{2,5} (p(x) - f_1(x))dx =$ $-\frac{1}{3}\int\limits_0^{2,5}(2x^3 - 5x^2)dx = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3\right]_0^{2,5} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{5^4}{2^3}\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{625}{288} \approx 2{,}17$	5
3.1	$V = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ mit $r^2 = \ell^2 - h^2 = 4^2 - h^2$ $V(h) = \frac{1}{3}(4^2 - h^2)\pi h = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{16}{3}\pi h$ $D_V =]0; 4[$	4
3.2	$\frac{dV(h)}{dh} = -h^2\pi + \frac{16}{3}\pi \overset{!}{=} 0 \Rightarrow h^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow h_1 = 4\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}3;\;\; h_2 \notin D_V$ $\frac{dV^2(h)}{dh^2} = -2h\pi$ $\frac{dV^2(\frac{4}{3}\sqrt{3})}{dh^2} = -2\cdot\frac{4}{3}\sqrt{3}\cdot\pi < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei h_1 h_1 ist die einzige Extremstelle innerhalb des Definitionsbereichs D_V. V ist eine stetige Funktion. Somit ist das rel. Maximum auch ein absolutes: $V_m = V(\frac{4}{3}\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}(\frac{4}{3}\sqrt{3})^3\pi + \frac{16}{3}\pi\frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 25{,}8$	7
	Summe Aufgabe I	50

Lösungshinweise Aufgabe II		BE
1.1	$\vec{c}=\vec{b}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{d}-\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}\Rightarrow C(4;\ 6;\ 2)$ $\vec{g}=\vec{c}+\overrightarrow{AE}=\vec{c}+\vec{e}-\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\6\end{pmatrix}\Rightarrow G(4;\ 6;\ 6)$	4
1.2	$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{EG}\circ\overrightarrow{ES}}{\left\lvert\overrightarrow{EG}\right\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{ES}\right\rvert}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{9}{\sqrt{18}\sqrt{5{,}5}}\Rightarrow\alpha\approx 25{,}2^\circ$	4
1.3	$F_{Dach}=4\cdot\frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{ES}\times\overrightarrow{EF}\right\rvert=2\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right\rvert=2\left\lvert\begin{pmatrix}0\\3\\-4{,}5\end{pmatrix}\right\rvert=2\sqrt{3^2+4{,}5^2}=10{,}8$	4
2.1	$E_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix};\quad\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\-4{,}5\end{pmatrix}$ $E_1:\ 3x_2-4{,}5x_3+n_0=0$ mit dem Punkt $E\Rightarrow n_0=18$ $E_1:\ 3x_2-4{,}5x_3+18=0$	5
2.2	Der Weg der Tropfen liegt auf der Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3{,}5\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ $g\cap E_1:\ 3(3{,}5)-4{,}5(2+4\lambda)+18=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{13}{12}\Rightarrow$ L $(3;\ \dfrac{7}{2};\ \dfrac{19}{3})$	5
2.3	P in E_1: $3\cdot 2k-4{,}5k+18=0\Rightarrow 1{,}5k=-18\Rightarrow k=-12$	3
	Summe Aufgabe II	25

Lösungshinweise Aufgabe III		BE
1.1	Spannweite: 1004 - 995 = 9; Modalwert $x_{mod} = 1001$	2
1.2	Anzahl: 50	3

Rangwert:	1	2	3	4	5	6	7	8
Widerstandswert:	995	996	998	999	1000	1001	1002	1004
Relat. Häufigkeit:	0,02	0,08	0,08	0,1	0,26	0,32	0,1	0,04

1.3 (BE: 2)

$$\bar{x} = 995 \cdot 0{,}02 + 996 \cdot 0{,}08 + 998 \cdot 0{,}08 + 999 \cdot 0{,}1$$
$$+ 1000 \cdot 0{,}26 + 1001 \cdot 0{,}32 + 1002 \cdot 0{,}1 + 1004 \cdot 0{,}04 = 1000$$

1.4 (BE: 3)

$$P(E) = \frac{16}{50} \cdot \frac{15}{49} = \frac{24}{245}$$

2.1 (BE: 5)

	S	$\bar{S}$	
A	4	36	40
$\bar{A}$	8	2	10
	12	38	$\boxed{50}$

oder

	S	S	
A	0,08	0,72	0,8
$\bar{A}$	0,16	0,04	0,2
	0,24	0,76	$\boxed{1}$

2.2 (BE: 3)

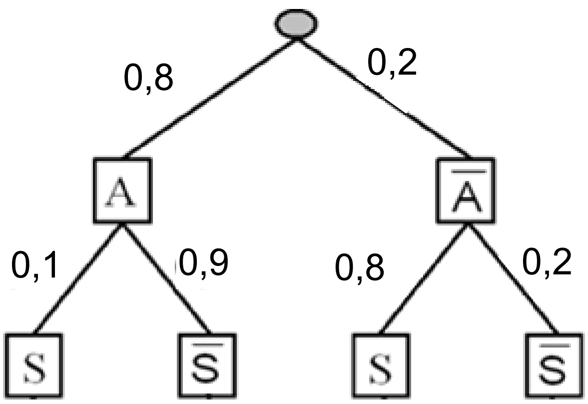
$$P(A \cap \bar{S}) + P(\bar{A} \cap S) = 0{,}88$$

2.3 (BE: 7)

$$P_{\bar{A}}(S) = \frac{P(\bar{A} \cap S)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}16}{0{,}2} = 0{,}8$$

oder

$$P_{\bar{A}}(S) = \frac{|\bar{A} \cap S|}{|\bar{A}|} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$



ω	$A \cap S$	$A \cap \bar{S}$	$\bar{A} \cap S$	$\bar{A} \cap \bar{S}$
$P(\{\omega\})$	0,08	0,72	0,16	0,04

Summe Aufgabe III	25
Gesamtsumme	100