ABITURPRÜFUNG 2013 AN BERUFSOBERSCHULEN

UND FACHOBERSCHULEN

ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Dienstag, den 4. Juni 2013, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten; die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A
A I

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+a^2}{a \cdot x^2}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ in der von a unabhängigen maximalen Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$.

1.1 Zeigen Sie, dass gilt: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a. (6 BE)

1.2 Ermitteln Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten des Graphen von f_a. (7 BE)
(Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{-2a^2}{x \cdot (x^2+a^2)}$)

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D_f und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an. (5 BE)

In den folgenden Teilaufgaben ist a = 2.

1.4 Ermitteln Sie im Punkt $N(-2 \mid y_N)$ die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f_2. Zeichnen Sie den Graphen von f_2 im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1LE = 1cm). Tragen Sie auch die Asymptoten und die Tangente t ein. (8 BE)

Gegeben ist weiter die Integralfunktion F durch $F(x) = \int_{-2}^{x} f_2(t)dt$ mit $D_F =]-\infty ; 0[$.

1.5 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten, das Krümmungsverhalten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von F.
Bestimmen Sie anschließend eine integralfreie Darstellung von F(x).
(Teilergebnis: $F(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x^2+4}{2x^2}\right) + 4 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \pi$) (10 BE)

1.6 Der Graph von f_2, die Tangente t und die y-Achse begrenzen im II. Quadranten eine Fläche, die sich nach oben ins Unendliche erstreckt. Berechnen Sie die Maßzahl dieses Flächenstücks. (7 BE)

2 Ein 20 cm großer Nadelbaum wird zum Zeitpunkt t = 0 gepflanzt. Das weitere Wachstum des Baumes wird in guter Näherung beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$\dot{x}(t) = 0{,}0025 \cdot x(t) \cdot (40 - x(t)) \text{ mit } 0{,}2 \leq x < 40.$$

Dabei ist x(t) die Höhe des Baumes in Metern in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren.

2.1 Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.
(mögliches Ergebnis: $x(t) = \frac{40}{1+199 \cdot e^{-0{,}10t}}$) (10 BE)

2.2 Berechnen Sie die Höhe, die der Baum auf lange Sicht erreicht und den Zeitpunkt t^*, in dem der Baum die Hälfte seiner maximalen Höhe erreicht hat. Berechnen Sie $\dot{x}(t^*)$ geschickt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. (7 BE)

1 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto (x^2 - a^2) \cdot e^{-ax}$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a und deren Anzahl jeweils in Abhängigkeit von a. (2 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass der Graph von f_a für $a \neq 0$ genau zwei lokale Extrempunkte besitzt. Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie die Abszissen und die Art der Extrempunkte des Graphen von f_a für alle $a \in \mathbb{R}$. (Zwischenergebnis: $f_a'(x) = (-ax^2 + 2x + a^3) \cdot e^{-ax}$) (10 BE)

Für die folgenden Teilaufgaben gilt **a = 1**.

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_1(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichung der Asymptote und die Abszissen der Extrempunkte des Graphen von f_1 an. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1LE = 1cm). (6 BE)

1.4 Begründen Sie, dass die Funktion $u: x \mapsto f_1(x)$, $D_u = \,]-\infty; 1-\sqrt{2}\,]$ umkehrbar ist.
Der Punkt P'(? | –1) liegt auf dem Graphen von u^{-1}. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t' in P' an diesen Graphen. (5 BE)

1.5 Gegeben ist die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_1^x f_1(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ und dem Graphen G_F.

1.5.1 Ermitteln Sie die Art und die Abszissen der Extrempunkte sowie die Abszissen der Wendepunkte von G_F. Begründen Sie die Anzahl der Nullstellen von F. (7 BE)

1.5.2 Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von F(x). Bestimmen Sie den Grenzwert von F(x) für $x \to +\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis anhand des Graphen von f_1.
(Teilergebnis: $F(x) = (-x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x} + 4e^{-1}$) (9 BE)

1.6 Gegeben ist weiter die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $g: x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x < 1 \\ \frac{\arctan(3-3x)}{x} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

Begründen Sie, dass g an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist. Überprüfen Sie, ob g an dieser Stelle auch differenzierbar ist. (7 BE)

2 Bei einer Massenproduktion werden in einem Produktionsschritt gleichzeitig viele Teile gleicher Gestalt hergestellt. Die Form für die Teile dieser Massenproduktion entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion h mit $h(x) = 1 - \cos(\frac{x}{2})$ und $D_h = [0\,;\,100\pi]$ um die x-Achse.

2.1 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts des gesamten Rotationskörpers. (4 BE)

2.2 Ermitteln Sie die Anzahl der hergestellten gleichen Teile pro Produktionsschritt und die Maßzahl des Volumens eines einzelnen Teils. (3 BE)

3 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + 2y = -2 + e^{-2x} \cdot \cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ mithilfe der Variation der Konstanten. (7 BE)

B I

1 Zum 40-jährigen Jubiläum des Bestehens der Beruflichen Oberschule „ARCUS" werden 250 Ehrengäste eingeladen. Speziell für die Ehrengäste findet ein Empfang mit dem Kultusminister statt. Aus den Erfahrungen der letzten Jahre wird angenommen, dass die Ehrengäste die Einladung mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% annehmen. Die Schule verfügt über eine Aula, die bei ausreichender Beinfreiheit Platz für 175 Stühle bietet.

1.1 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die 175 Stühle nicht ausreichen. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie die Anzahl der zusätzlich mindestens benötigten Stühle für den Empfang, wenn das Risiko, zu wenige Stühle aufgestellt zu haben, höchstens 1% betragen soll. (6 BE)

1.3 Eine Überlegung des Schulleiters ist, dass es nicht gut aussieht, wenn bei dieser Veranstaltung zu viele Plätze leer bleiben. Daher möchte er wissen, in welchem Bereich die zu erwartende Anzahl der Ehrengäste liegt. Bestimmen Sie den Bereich $J = \{ x \in \mathbb{N} \mid |x - \mu| < \sigma \}$, in dem die zu erwartende Anzahl der Ehrengäste liegt. Berechnen Sie die auch die Wahrscheinlichkeit P(J). (4 BE)

2 Die „ARCUS"-Schule führt zu Beginn jeden Schuljahres bei allen neu aufgenommenen Schülern der technischen Ausbildungsrichtung (T-Schüler) einen Test durch, um Schüler ausfindig zu machen, die gemeinsam in sogenannten Computerklassen unterrichtet werden können. Erfahrungsgemäß sind im Schnitt 15% der Schüler der Ausbildungsrichtung Technik für die Computerklasse geeignet.

2.1 Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Unter den 212 getesteten T-Schülern befinden sich genau 30 geeignete."
B: „Unter den 212 getesteten T-Schülern sind mindestens 20, höchstens aber 40, die für die Computerklassen geeignet sind."
C: „Der achte getestete T-Schüler ist der erste geeignete Schüler."
D: „Spätestens der achte zufällig getestete T-Schüler ist der erste geeignete." (11 BE)

2.2 Die T-Schüler benötigen für den Test durchschnittlich 45 Minuten mit einer Standardabweichung von 3,0 Minuten. Man kann davon ausgehen, dass die von den T-Schülern benötigte Zeit für den Test normalverteilt ist. Um den Schülern entgegen zu kommen, wird die Dauer des Tests auf 50 Minuten festgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter T-Schüler mit dem Test dennoch nicht fertig wird. (3 BE)

2.3 Besonders geeignete T-Schüler möchte die "ARCUS"-Schule durch kostenfrei zur Verfügung gestellte Notebooks fördern. Ein hierfür geeigneter Test, der F-Test, zeigt, dass ein zufällig ausgewählter T-Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit von 16% für diese Förderung in Frage kommt. Bei einem für die Computerklasse ungeeigneten T-Schüler zeigt dieser F-Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 6% an, dass der Schüler für die Förderung geeignet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der F-Test bei einem für die Computerklasse geeigneten T-Schüler positiv ausfällt. (5 BE)

3 Die „ARCUS"-Schule bietet seit einigen Jahren das Fach Spanisch als zweite Fremdsprache an. Da die Sprache Spanisch bei Schülern immer beliebter wird, geht die Schule davon aus, dass zum kommenden Schuljahr eine weitere Lehrkraft für Spanisch benötigt wird. Dies ist dann der Fall, wenn der Anteil der Schüler, die das Fach Spanisch belegen, 15% übersteigt (Gegenhypothese). Daher werden 500 rein zufällig ausgewählte Schüler der 11-ten Klassen befragt, ob sie im nächsten Schuljahr Spanisch wählen werden. Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an, bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 5% und geben Sie den daraus resultierenden Annahme- bzw. Ablehnungsbereich an. (7 BE)

1 Der DJ des regionalen Radiosenders „Airplay“ hat für die nächsten beiden Stunden 40 Lieder ausgewählt und in einer „Playlist“ gespeichert. Darunter befinden sich 15 deutschsprachige Lieder. Die Lieder in der Playlist werden in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung abgespielt.

1.1 Auf wie viele Arten können die 40 Lieder angeordnet werden, wenn nur zwischen deutschsprachigen und nicht deutschsprachigen Liedern unterschieden wird? (2 BE)

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 10 gespielten Liedern
a) genau 5 deutschsprachige Lieder sind.
b) zuerst 4 deutschsprachige und dann 6 nicht deutschsprachige Lieder sind. (5 BE)

2 Für die letzte halbe Stunde der Nachtsendung sind noch 20 Lieder in der Playlist, von denen aber aus Zeitgründen nur 10 gespielt werden können.
Der DJ hat wieder die zufällige Reihenfolge eingestellt, aber vergessen, die Wiederholungsfunktion abzuschalten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der letzten halben Stunde trotzdem kein Titel mehrmals abgespielt wird. (3 BE)

3 Der Radiosender ließ in seiner Region eine Telefonumfrage unter zufällig ausgewählten Personen zum Bekanntheitsgrad des Senders durchführen.
40% der Personen waren weiblich, wobei jede Zehnte von diesen den Sender nicht kannte. 75% der Personen, die den Sender nicht kannten, waren männlich.

3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
F: „Eine Person kannte den Sender bereits.“
G: „Eine Person war männlich und kannte den Sender bereits.“ (5 BE)

3.2 Ermitteln Sie, wie viel Prozent der männlichen Teilnehmer den Sender noch nicht kannten. (2 BE)

4 Um seinen Bekanntheitsgrad zu steigern, führt der Sender ein Gewinnspiel durch. Dazu werden 400 CDs mit speziellen Liedern und einem Cover mit dem Logo des Senders benötigt.
Aus der Erfahrung weiß man, dass 95% der bestellten CDs brauchbar sind.

4.1 Wie viele CDs muss der Radiosender mindestens in Auftrag geben, damit mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 400 fehlerfreie CDs darunter sind? (8 BE)

4.2 Die unbrauchbaren CDs haben mindestens einen der voneinander unabhängigen Fehler A (Die CD weist einen Brennfehler auf) oder Fehler B (Das Cover ist ein Fehldruck). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn bekannt ist, dass der Fehler B mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % auftritt. (3 BE)

5 Der Radiosender wirbt mit einer Quote von mindestens 10% deutschsprachiger Songs. Ein Hörer hat den Verdacht, dass diese Angabe zu hoch ist (Gegenhypothese). In einem Test betrachtet er 500 Lieder.

5.1 Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für diesen Test bei einem Signifikanzniveau von 5%.
(Teilergebnis: $A = \{39, ..., 500\}$) (7 BE)

5.2 Wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl der Anteil der deutschsprachigen Lieder tatsächlich nur 8% beträgt. (5 BE)