ABITURPRÜFUNG 2013 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Dienstag, 4. Juni 2013, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten; die Auswahl trifft die Schule

AI

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$ durch $f: x \mapsto \frac{x^2-5}{4\cdot(x-3)}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie D_f sowie die Nullstellen und die Art der Definitionslücke von f. (3 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von f auch in der Form $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-3}$ darstellen lässt und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an. (4 BE)

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Geben Sie auch die Wertemenge von f an.
(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{4(x-3)^2}$) (10 BE)

1.4 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-4 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. (5 BE)

1.5 G_f schließt mit der x – Achse ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.4 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen gerundet. (6 BE)

2.0 Nun ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{x^2-5}{4(x-3)}\right)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ gegeben. Ihr Graph ist G_g.

2.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung in Aufgabe 1.4, dass gilt: $D_g = \left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[\cup \left]3;\infty\right[$. Untersuchen Sie g auf Nullstellen und geben Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g an. (6 BE)

2.2 Ermitteln Sie gegebenenfalls mithilfe bisheriger Ergebnisse die Extremstellen von G_g und deren Art. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

3.0 Eine Gemeinde plant den Umbau einer Kreuzung, an der es unter der Woche am Morgen häufig zu Stauungen kommt. Aus diesem Grund wird das Verkehrsaufkommen untersucht und mathematisch modelliert. Für die Verkehrsdichte (Anzahl der Fahrzeuge pro Minute) an der Kreuzung ergibt sich näherungsweise eine Funktion der Form

$$z: t \mapsto 0{,}25 \cdot t^2 \cdot e^{-a \cdot t} + 5 \text{ mit } 0 \leq t \leq 90 \text{ und } a > 0$$

t ist die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Minuten.

Bei der Rechnung kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

3.1 Um 7:13 Uhr beträgt die Verkehrsdichte 27 Fahrzeuge pro Minute. Bestimmen Sie damit den Wert des Parameters a.
(Ergebnis: $a = 0{,}05 \left[\frac{1}{\text{min}}\right]$) (3 BE)

3.2 Berechnen Sie die Verkehrsdichte um 7:00 Uhr und um 8:30 Uhr. (2 BE)

3.3 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Verkehrsdichte am größten ist und berechnen Sie die größte Verkehrsdichte.
(Zur Kontrolle: $\frac{d(z(t))}{dt} = \dot{z}(t) = (0{,}5t - 0{,}0125t^2) \cdot e^{-0{,}05t}$) (7 BE)

3.4 Zeichnen Sie die Kurve für die Verkehrsdichte in ein Koordinatensystem.
(Maßstab: 1 cm $\hat{=}$ 10 min; 1cm $\hat{=}$ $10 \frac{1}{\text{min}}$) (4 BE)

3.5 Zeigen Sie, dass die Funktion Z mit
$Z(t) = -0{,}25e^{-0{,}05t}(20t^2 + 800t + 16000) + 5t$ mit $0 \leq t \leq 90$ eine Stammfunktion der Funktion z ist und berechnen Sie $\int_0^{60} z(t)dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (6 BE)

AII

1.0 Eine gebrochenrationale Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $D_f \subset \mathbb{R}$, hat eine Nullstelle bei $x = -1$, eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) ohne Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 1$ und eine stetig behebbare Definitionslücke an der Stelle $x = 4$. Der Graph von f hat ferner eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x), wenn der Nenner ein Polynom dritten Grades ist und außerdem gilt: $f(5) = 3$. (5 BE)

1.2.0 Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung g der Funktion f betrachtet: $g: x \mapsto \frac{8x+8}{(x-1)^2}$ mit $D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

1.2.1 Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_g sowie die Nullstelle von g an. (3 BE)

1.2.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_g und ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_g.

(Teilergebnis: $g'(x) = \frac{-8x-24}{(x-1)^3}$) (9 BE)

1.2.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_g mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem. Berechnen Sie dazu weitere geeignete Funktionswerte. (5 BE)

1.2.4 Zeigen Sie, dass gilt: $\int g(x)dx = 4 \cdot \ln((x-1)^2) - \frac{16}{x-1} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die G_g mit den Achsen einschließt. (5 BE)

2.0 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto 10 \cdot (2 - \ln(x))^2$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie D_h sowie die Lage und die Vielfachheit der Nullstelle von h und untersuchen Sie das Verhalten von h an den Rändern von D_h. (5 BE)

2.2 Begründen Sie nur mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse ohne weitere Berechnungen, dass die Nullstelle der Funktion h ein Tiefpunkt von G_h ist. (2 BE)

2.3 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_h.

(Teilergebnis: $h''(x) = -20 \cdot \frac{\ln(x) - 3}{x^2}$) (7 BE)

2.4 Skizzieren Sie G_h für $0 < x \le 24$ in ein Koordinatensystem.
(Maßstab: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 0{,}5\,\text{cm}$) (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

3.0 Morgens um 7:00 Uhr wird eine Tasse heißer Tee eingeschenkt. Der Abkühlvorgang des Tees kann durch die Funktionsgleichung $T(t) = 18 + a \cdot e^{-c \cdot t}$ (mit $a, c > 0, t \geq 0$) beschrieben werden, wobei T(t) die Temperatur des Tees in Grad Celsius angibt und t die Zeit in Minuten. Der Abkühlvorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ um 7:00 Uhr.

Bei der Rechnung kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.

3.1 Nach 2 Minuten hat der Tee eine Temperatur von 74°C und um 7:25 Uhr ist er bereits auf 28°C abgekühlt. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Werte der Konstanten a und c. (5 BE)

Setzen Sie in den folgenden Teilaufgaben $a = 65$ und $c = 0{,}075$.

3.2 Ermitteln Sie die Temperatur des Tees um 7:00 Uhr und auf welche Endtemperatur sich der Tee langfristig abkühlen wird. Erläutern Sie die Bedeutung der Endtemperatur im Sachzusammenhang. (3 BE)

3.3 Bestimmen Sie die Werte der Ableitung von T nach 3 Minuten und nach 25 Minuten. Erläutern Sie die Werte im Sachzusammenhang. (4 BE)

3.4 Der Abkühlvorgang wird als abgeschlossen bezeichnet, wenn die Temperatur des Tees unter 19°C fällt. Berechnen Sie, um wie viel Uhr (gerundet auf ganze Minuten) dies der Fall ist. (3 BE)

1 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{c}_k=\begin{pmatrix}-1\\k+2\\k+3\end{pmatrix}$ mit $k\in\mathbb{R}$ gegeben.

Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}_k$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. (4 BE)

2.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$ und $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$ sowie der Punkt $A(10\,|\,2\,|\,8)$ gegeben.

2.1 Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander verlaufen. (4 BE)

2.2 Die Ebene E wird durch den Punkt A und die Gerade g aufgespannt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und in Koordinatenform.
(mögliches Teilergebnis: $E: 2x_1-20x_2+3x_3-4=0$) (5 BE)

2.3 Skizzieren Sie die Ebene E, die Geraden g und h sowie den Punkt A in eine Zeichnung. (3 BE)

2.4 Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P der Ebene E mit der Geraden h. Begründen Sie, dass die Gerade j, die durch A verläuft und die Geraden g und h schneidet, in E liegt.
Stellen Sie eine Gleichung dieser Geraden j auf und zeichnen Sie die Gerade und den Punkt P in die Zeichnung von 2.3 ein. (6 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung BI

3.0 Die drei Sektoren R, S und T eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Gesamtproduktion beträgt im Sektor R 240 ME, im Sektor S 150 ME und in Sektor T 220 ME.

Die Inputmatrix A ist gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

3.1 Erstellen Sie die Input-Output-Tabelle. (4 BE)

3.2 Die Produktion soll aufgrund von Umbaumaßnahmen im Sektor T um 20 ME verringert werden, im Sektor R aber konstant bleiben.
Wegen langfristiger Verträge muss die Marktabgabe in den Sektoren R und T jeweils mindestens 30 ME betragen. Die gesamte Marktabgabe darf 153 ME nicht überschreiten, da zusätzlich logistische Probleme aufgetreten sind.
Bestimmen Sie den Bereich, in welchem die Produktion des Sektors S möglich ist. (8 BE)

3.3 Es wird ein neues Produktionsverfahren im Sektor T eingeführt. Dies hat die neue Inputmatrix $A_{neu} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,09 \\ 0,1 & 0,2 & 0,18 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ zur Folge.
Berechnen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$, wenn erwartet wird, dass die Sektoren R 51 ME, S 60 ME und T 30 ME an den Markt abgeben.
Interpretieren Sie die prozentualen Veränderungen der Einträge a_{13} und a_{23} der Matrix A_{neu} gegenüber den entsprechenden Einträgen der Matrix A. (6 BE)

BII

1.0 Die drei Fertigungsbereiche M, B und C eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die nebenstehende Input-Output-Tabelle und

	M	B	C	Markt	Produktion
M	20	40	20	20	100
B	a	100	10	b	200
C	80	40	40	c	d

die zugehörige Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,8 & 0,5 & e \\ 0,8 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ geben eine Übersicht über die Verflechtungen (Angaben in Mengeneinheiten (ME), a, b, c, d, e $\in \mathbb{R}^+$).

1.1 Berechnen Sie die Variablen a, b, c, d und e und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes a_{21} der Inputmatrix. (6 BE)

1.2.0 Für die nachfolgenden Aufgaben gilt: $e = 0,05$.

1.2.1 Im kommenden Produktionszeitraum wird $\vec{y} = (48\ \ 72\ \ 24)^T$ als Marktvektor zugrunde gelegt. Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor. (5 BE)

1.2.2 Für einen zukünftigen Produktionszeitraum sollen folgende Rahmenbedingungen gelten:

- Die Produktion des Bereichs B ist doppelt so groß wie die Produktion in M.
- Bereich C gibt keine Güter an den Markt ab.
- Die Produktion von Fertigungsbereich C beträgt 120 ME.

Berechnen Sie den Produktions- und den Marktabgabevektor für diese Planung und wie viel Prozent ihrer Produktion M und B jeweils an den Markt abgeben. (8 BE)

2.0 In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(1|-2|1)$, $B(-2|2|2)$, $C(-1|4|0)$ und $S_k(7-k|k-3|k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

2.1 Ermitteln Sie, für welche Werte von k die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS_k}$ linear unabhängig sind, und geben Sie an, was dies für die Lage der Punkte A, B, C und S_k bedeutet. (7 BE)

2.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, welche durch den Punkt S_5 (also $k = 5$) sowie den Mittelpunkt M der Strecke $[BC]$ verläuft. (3 BE)

2.3 Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an und bestimmen Sie die zugehörige Koordinatenform.
(Mögliches Teilergebnis: $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$) (4 BE)

2.4 Ermitteln Sie eine Gleichung einer Ebene F, die parallel zu E verläuft und den Punkt S_5 enthält.
Erstellen Sie eine Skizze, die die Ebenen E, F, die Punkte A, B, C, M und S_5 und die Gerade h enthält und folgern Sie daraus die gegenseitige Lage der Geraden h und AC. (7 BE)