

**ABITURPRÜFUNG 2014 ZUM ERWERB DER  
FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE  
AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN**

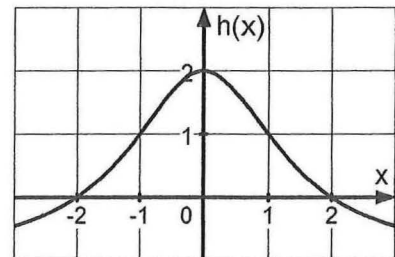
**MATHEMATIK**

**Nichttechnische Ausbildungsrichtungen**

**Mittwoch, 28. Mai 2014, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr**

**Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den  
Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;  
die Auswahl trifft die Schule**

- 1.0 Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0,5x}$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ . Ihr Graph wird mit  $G_f$  bezeichnet.
- 1.1 Untersuchen Sie  $f$  auf Nullstellen und das Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ . (3 BE)
- 1.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von  $G_f$  sowie Art und Koordinaten der Punkte mit horizontalen Tangenten. Untersuchen Sie  $G_f$  auch auf Wendepunkte.  
(Teilergebnis:  $f'(x) = -\frac{1}{8}x^2 e^{-0,5x}$ ) (10 BE)
- 1.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente  $t$  an den Graphen  $G_f$  im Punkt  $P(-2 | f(-2))$ .  
(Ergebnis:  $t : y = -0,5e \cdot x$ ) (3BE)
- 1.4 Zeichnen Sie  $G_f$  und die Tangente aus 1.3 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für  $-3 \leq x \leq 7$  in ein kartesisches Koordinatensystem. (1LE = 1cm) (5 BE)
- 1.5.1 Berechnen Sie die reellen Werte von  $a$  und  $b$  so, dass die Funktion  $F : x \mapsto \left(-0,5x^2 + ax + b\right) \cdot e^{-0,5x}$  mit  $D_F = \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$  wird.  
(Ergebnis:  $a = -4$ ;  $b = -12$ ) (5 BE)
- 1.5.2 Die Tangente  $t$  aus 1.3, der Graph  $G_f$  und die  $y$ -Achse schließen im II. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts. (5 BE)
- 2.0 In der nebenstehenden Zeichnung ist der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion  $h : x \mapsto h(x)$  dargestellt. Für die Funktion  $g$  gilt:  $g(x) = \ln(h(x))$ .



- 2.1 Bestimmen Sie aus der Zeichnung die maximale Definitionsmenge  $D_g \subset \mathbb{R}$  von  $g$  und geben Sie das Verhalten von  $g(x)$  an den Rändern von  $D_g$  sowie die Nullstellen von  $g(x)$  an. (5 BE)
- 2.2 Untersuchen Sie den Graphen von  $g$  auf Extrempunkte und geben Sie deren Art und Koordinaten an. (4 BE)

Fortsetzung nächste Seite

## Fortsetzung AI

- 3.0 Der Sauerstoffgehalt  $S$  von Gewässern, der in mg/l (Milligramm pro Liter) angegeben wird, lässt Rückschlüsse auf den Fischbestand der Gewässer zu. Ertragreiche Fischgewässer haben einen Sauerstoffgehalt von mehr als 6 mg/l. Dieser hängt unter anderem von der Wassertemperatur und dem Grad der Verunreinigung des Wassers ab.

Ein Bach wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  durch Einleiten von organischen Abfällen an einer Stelle verunreinigt. Bei annähernd konstanter Temperatur beschreibt folgende Funktion modellhaft den Sauerstoffgehalt in der Nähe der Einleitungsstelle in den Tagen nach der Verunreinigung:

$$S: t \mapsto S(t) = \frac{-36t}{t^2 + 16} + 6 \quad (t \geq 0 \text{ in Tagen})$$

Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

- 3.1 Geben Sie den Sauerstoffgehalt  $S$  zu Beginn der Schadstoffeinleitung an und ermitteln Sie den Wert, auf den sich  $S$  langfristig einstellen wird. (3 BE)
- 3.2 Ermitteln Sie die Zeitintervalle, in denen der Sauerstoffgehalt steigt bzw. fällt und bestimmen Sie damit die Koordinaten des Extrempunktes von  $S$ . Interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.  
(Zur Kontrolle:  $\dot{S}(t) = 36 \cdot \frac{t^2 - 16}{(t^2 + 16)^2}$ ) (8 BE)
- 3.3 Zeichnen Sie den Verlauf des Sauerstoffgehalts für die ersten 12 Tage in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 BE)
- 3.4 Unterhalb eines Werts von 3 mg/l können Fische nicht überleben. Untersuchen Sie rechnerisch, ab welchem Zeitpunkt ein Fischsterben wegen Sauerstoffmangel zu erwarten ist und ab welchem Zeitpunkt der Sauerstoffgehalt ein Überleben der Fische wieder ermöglicht. (5 BE)

## AII

- 1.0 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion  $f: x \mapsto \frac{x^3 + 3x^2}{2(x+2)^2}$  in ihrer maximalen Definitionsmenge  $D_f \subseteq \mathbb{R}$ . Ihr Graph ist  $G_f$ .
- 1.1 Geben Sie  $D_f$  und die Art der Definitionslücke an und bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$ . Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte von  $f$  bei Annäherung an die Definitionslücke. (5 BE)
- 1.2 Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von  $f$  auch darstellen lässt durch 
$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{(x+2)^2}.$$
 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von  $G_f$  an und untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von  $x$  der Graph  $G_f$  oberhalb bzw. unterhalb der schiefen Asymptote verläuft. (6 BE)
- 1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von  $G_f$  und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von  $G_f$ .  
(Mögliches Teilergebnis:  $f'(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{2(x+2)^3}$ ) (9 BE)
- 1.4 Zeichnen Sie die Asymptoten von  $G_f$  für  $-5 \leq x \leq 4$  in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie  $G_f$  in die Zeichnung. (5 BE)
- 1.5  $G_f$ , die  $x$ -Achse, die schiefe Asymptote und die Gerade mit der Gleichung  $x = u$  mit  $u > 1$  schließen ein Flächenstück ein. Schraffieren Sie das Flächenstück für  $u = 3$  in der Zeichnung von Aufgabe 1.4 und ermitteln Sie die Maßzahl  $A(u)$  des Flächeninhalts in Abhängigkeit von  $u$ .  
Untersuchen Sie rechnerisch, ob  $A(u)$  für  $u \rightarrow \infty$  endlich ist. (7 BE)
- 2 Gegeben ist die reelle Funktion  $h$  durch  $h(x) = \ln(g(x))$  mit  $x \in D_h$ . Dabei ist  $g$  eine quadratische Funktion, deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, die zwei verschiedene Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse besitzt. Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie jeweils Ihre Aussagen.
- Für die Definitionsmenge gilt:  $D_h = \mathbb{R}$ .
  - Die Funktion  $h$  besitzt genau zwei Nullstellen.
  - Der Graph von  $h$  besitzt genau einen Extrempunkt.
- (6 BE)

Fortsetzung nächste Seite

## Fortsetzung AII

- 3.0 Für Ausdauersportler ist die Laktatkonzentration  $L$  im Blut (in mmol/l) ein Indikator für die Ausdauerleistungsfähigkeit. Bei Läufern wird auf dem Laufband die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $v$  des Läufers (in km/h) gemessen.

Die Messwerte von Läufer Max bei einem Laktattest lassen vermuten, dass die Werte nach einer Funktion der Form  $L(v) = (0,02v - 0,25) \cdot e^{a \cdot v} + b$  für  $0 \leq v \leq 19$  verlaufen.

Bei den Rechnungen kann auf Benennungen verzichtet werden. Die Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

- 3.1 Berechnen Sie die Werte für  $a$  und  $b$ , wenn die Laktatkonzentration bei Max in Ruhe 0,95 mmol/l und bei einer Geschwindigkeit von 7 km/h 0,65 mmol/l beträgt.  
(Ergebnis:  $a \approx 0,23$ ;  $b = 1,20$ ) (4 BE)
- 3.2 Untersuchen Sie mithilfe der 1. Ableitung von  $L$  den Verlauf der Laktatkonzentration im Blut von Max und interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.  
(Teilergebnis:  $L'(v) = (0,0046v - 0,0375) \cdot e^{0,23v}$ ) (8 BE)
- 3.3 Zeichnen Sie die Laktatkurve für  $0 \leq v \leq 19$  in ein Koordinatensystem.  
(Maßstab: 1cm  $\hat{=}$  2 km/h; 1cm  $\hat{=}$  1 mmol/l) (4 BE)
- 3.4 Der Laktattest dient auch dazu, die persönliche anaerobe Schwelle des Läufers zu ermitteln. Bei der anaeroben Schwelle reicht der aufgenommene Sauerstoff gerade noch aus, um den Energiebedarf in der Muskulatur zu decken.  
Zur Bestimmung der anaeroben Schwelle gibt es unterschiedliche Modelle:  
a) Die Steigung der Laktatkurve hat den Wert 1.  
b) Die Laktatkonzentration im Blut beträgt 4 mmol/l.  
Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle für Max nach beiden Modellen und vergleichen Sie die Werte. Verwenden Sie dazu für a) als Näherungsfunktion für die Laktatkonzentration  $N(v) = e^{0,5v-7} + 1$  und lesen Sie den Wert für b) aus der Zeichnung von 3.3 ab. (6 BE)

## BI

- 1.0 Die drei Sektoren U, V und W eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell gemäß nachstehender Tabelle miteinander und mit dem Markt verflochten. Die Zahlenangaben erfolgen in Mengeneinheiten (ME).

|   | U  | V  | W  | Markt | Produktion |
|---|----|----|----|-------|------------|
| U | 90 | 20 | 12 | a     | 150        |
| V | 0  | b  | 12 | 28    | 200        |
| W | c  | 0  | 84 | 6     | 120        |

- 1.1 Bestimmen Sie die Werte a, b und c und geben Sie deren Bedeutung an. (4 BE)
- 1.2 Berechnen Sie mithilfe der Inputmatrix A die Marktabgaben der einzelnen Sektoren bei einer Produktion von 100 ME im Sektor U, 150 ME im Sektor V und 80 ME im Sektor W. (3 BE)

- 1.3 Aufgrund von veränderten wirtschaftlichen Rahmenbedingungen entsteht die folgende Situation:

- Die Marktabgabe von Sektor V sinkt auf 10 ME,
- die gesamte Produktion von Sektor U verbleibt im Unternehmen,
- Die Sektoren V und W produzieren gleich viel.

Ermitteln Sie den neuen Konsumvektor und den neuen Produktionsvektor. (5 BE)

- 1.4 Aufgrund neuer technischer Entwicklungen entsteht für die Produktion eine neue Technologie. Dies führt zu einer gänzlich neuen Inputmatrix, bei der zwei Einträge aufgrund nicht abgeschlossener Umstrukturierungen noch variabel sind:

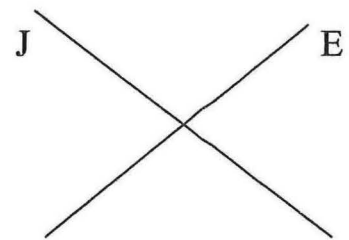
$$A_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & t \\ 0,1 & 0,1 & 0 \\ 0,05 & t - 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0; \text{ es wird die Produktion}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ angestrebt.}$$

Ermitteln Sie hierfür das größtmögliche Intervall der t-Werte. (7 BE)

Fortsetzung nächste Seite

- 2.0 In einem Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A(-4|0|0)$ ,  $B(-1|-1|1)$  und  $C(0|-3|1)$  sowie die Ebenenschar  $F_a: -2x_1 + ax_2 + 5x_3 + 8 = 0$  mit  $a \in \mathbb{R}$  gegeben.
- 2.1 Die drei Punkte A, B und C spannen die Ebene E auf. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.  
(Mögliches Teilergebnis:  $E: 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 16 = 0$ ) (5 BE)
- 2.2 Ermitteln Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E und  $F_a$  in Abhängigkeit von a. (4 BE)
- 2.3 Bestimmen Sie den Wert a so, dass die zugehörige Ebene  $F_a$  den Punkt  $Z(-2|1|-3)$  enthält. (2 BE)
- 2.4.0 Im Folgenden gilt:  $a = 3$ .  
Die zugehörige Ebene  $F_3$  lautet somit:  $F_3: -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8 = 0$ .
- 2.4.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und  $F_3$ .  
(mögliches Ergebnis:  $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ ) (4 BE)
- 2.4.2 Der Punkt  $A'$  entsteht durch Spiegelung des Punktes A am Punkt Z aus 2.3. Berechnen Sie die Koordinaten von  $A'$ . (2 BE)
- 2.4.3 Die Ebene J wird durch die Gerade s und den Punkt  $A'(0|2|-6)$  festgelegt. Geben Sie eine Gleichung von J an.  
Die nebenstehende Skizze zeigt die Ebenen E und J. Übertragen Sie die Zeichnung auf Ihr Blatt und ergänzen Sie die Zeichnung durch die Ebene  $F_3$  sowie die Punkte A,  $A'$  und Z. (4 BE)





- 1.0 In einem Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A(3|2|-4)$ ,  $B_b(b-2|8|-12)$  und  $C_c(2|-1|c-2)$  mit  $b, c \in \mathbb{R}$  sowie die Ebene  $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$  und die Geradenschar  $g_m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ -2 \end{pmatrix}$  mit  $r, m \in \mathbb{R}$  gegeben.
- 1.1 Untersuchen Sie, für welche  $b, c \in \mathbb{R}$  die Punkte A, B und C keine Ebene aufspannen. (5 BE)
- 1.2 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, welche durch die Punkte A,  $B_{-1}$  und  $C_2$  (also  $b = -1$  und  $c = 2$ ) aufgespannt wird, und geben Sie die besondere Lage von F im Koordinatensystem an. (Mögliches Ergebnis:  $F: 4x_2 + 3x_3 + 4 = 0$ ) (5 BE)
- 1.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F. (4 BE)
- 1.4 Bestimmen Sie die Lage von  $g_m$  gegenüber E in Abhängigkeit von m. (Teilergebnis:  $r = \frac{-1}{3+m}$ ) (5 BE)
- 1.5 Ermitteln Sie m so, dass der Schnittpunkt von  $g_m$  und E in der  $x_2x_3$ -Ebene liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes. (4 BE)
- 2.0 Die drei Abteilungen Kunststofftechnik (K), Elektrotechnik (E) und Leichtbau (L) eines Betriebes sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell mit der Inputmatrix  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,05 & 0,55 \end{pmatrix}$  verflochten.
- 2.1 In der momentanen Abrechnungsperiode produziert die Kunststofftechnik 120 Mengeneinheiten (ME), die Elektrotechnik 180 ME und der Leichtbau 140 ME. Berechnen Sie, welche Mengen an die Konsumenten geliefert werden. (3 BE)
- 2.2 In einem zukünftigen Zeitraum wird damit gerechnet, dass die Abteilungen K und L gleich viel produzieren. Zudem beliefern K und E den Markt in gleichem Umfang. L gibt 42 ME an den Markt ab. Berechnen Sie unter diesen Voraussetzungen den Produktions- und Marktvektor. (7 BE)
- 2.3.0 Für einen anderen Produktionszeitraum ist der Produktionsvektor  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \cdot t \\ 140 \end{pmatrix}$  vorgesehen, wobei die reelle Zahl  $t$  ( $t \geq 0$ ) eine konjunkturabhängige Größe ist.
- 2.3.1 Ermitteln Sie die Marktabgaben in Abhängigkeit von  $t$  und damit das Intervall der zulässigen Werte für  $t$ . (4 BE)
- 2.3.2 Nun sei  $t \in [3; 13]$ . Bestimmen Sie denjenigen Wert für  $t$ , für den die Summe der Marktabgaben maximal wird. (3 BE)