

ABITURPRÜFUNG 2014 AN BERUFSOBERSCHULEN  
UND FACHOBERSCHULEN  
ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN  
HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Mittwoch, den 28. Mai 2014, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den  
Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;  
die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A  
A I

- 1 Gegeben ist die Funktion  $f_a : x \mapsto \arcsin\left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\right)$  mit der Definitionsmenge  $D_{f_a} = \mathbb{R}$  und dem Parameter  $a \in \mathbb{R}^+$ .
- 1.1 Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von  $f_a$  und die Nullstellen von  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$ . Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f_a(x)$  an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie eine Gleichung der Asymptote des Graphen von  $f_a$  an. (6 BE)
- 1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und die Art und die Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von  $f_a$  sowie das Verhalten von  $f'_a(x)$  bei der Extremstelle in Abhängigkeit von  $a$ . Welche Bedeutung hat dies für die Funktion  $f_a$ ? (9 BE)  
(Teilergebnis:  $f'_a(x) = \frac{-2a}{a^2 + x^2}$  für  $x > 0$ )
- 1.3 Die Funktion  $k$  ist gegeben durch  $k : x \mapsto -2 \cdot \arctan(x)$  mit der Definitionsmenge  $D_k = \mathbb{R}$ . Begründen Sie, dass für  $x \geq 0$  gilt:  $f_1(x) = k(x) + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ , und bestimmen Sie  $c$ . (4 BE)
- 1.4 Zeichnen Sie den Graphen von  $f_1$  im Bereich  $-5 \leq x \leq 5$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm). Tragen Sie auch die zugehörige Asymptote ein. (4 BE)
- 1.5 Gegeben ist weiter die Integralfunktion  $F$  durch  $F(x) = \int_0^x f_1(t) dt$  mit der Definitionsmenge  $D_F = \mathbb{R}$ .
- 1.5.1 Bestimmen Sie, ohne die Integration auszuführen, das Symmetrieverhalten, das Monotonieverhalten und die Abszissen der Extrempunkte des Graphen von  $F$  und deren Art. (6 BE)
- 1.5.2 Der Graph von  $f_1$  und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. (6 BE)
- 2 Gegeben ist nun die Funktion  $g : x \mapsto 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$  mit der Definitionsmenge  $D_g = \mathbb{R}_0^+$ .
- 2.1 Ermitteln Sie das Verhalten von  $g(x)$  für  $x \rightarrow +\infty$ . (3 BE)
- 2.2 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von  $g$ . (8 BE)
- 2.3 Der Graph von  $g$ , die  $x$ -Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x=4$  schließen eine Fläche  $A$  ein. Bei der Rotation der Fläche  $A$  um die  $x$ -Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts dieses Rotationskörpers. (6 BE)
- 3 Bestimmen Sie für  $x > 1$  die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung  

$$x \cdot \ln(x) \cdot y' + y = \ln(x)$$
mit der Methode der Variation der Konstanten. (8 BE)

- 1 Gegeben ist die Funktion  $f_a : x \mapsto \frac{4e^x}{1+e^{ax}}$  mit der Definitionsmenge  $D_{f_a} = \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}^+$ .
- 1.1 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte  $f_a(x)$  an den Rändern der Definitionsmenge in Abhängigkeit von  $a$ . (6 BE)
- 1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie gegebenenfalls die Abszisse und die Art des Extrempunktes des Graphen von  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$ . (9 BE)
- (mögliches Zwischenergebnis:  $f'_a(x) = 4 \cdot \frac{e^x(1+e^{ax}(1-a))}{(1+e^{ax})^2}$ )

Für die folgenden Teilaufgaben gilt  $a = 2$ .

- 1.3 Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von  $f_2$ . Geben Sie die Gleichung der Asymptote und die Koordinaten und die Art des Extrempunktes des Graphen von  $f_2$  an. Zeichnen Sie den Graphen von  $f_2$  im Bereich  $-3 \leq x \leq 3$  unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem (1LE = 2cm). (7 BE)
- 1.4 Gegeben ist weiter die Integralfunktion  $F : x \mapsto \int_0^x f_2(t) dt$  mit der Definitionsmenge  $D_F = \mathbb{R}$ .
- 1.4.1 Bestimmen Sie, ohne  $F(x)$  integralfrei darzustellen, die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von  $F$ . (3 BE)
- 1.4.2 Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von  $F(x)$  und untersuchen Sie damit, ob die Fläche, die vom Graphen von  $f_2$  und den Koordinatenachsen im ersten Quadranten begrenzt wird, einen endlichen Flächeninhalt hat. (5 BE)
- 2 Gegeben ist nun die Funktion  $g : x \mapsto \arccos(-2x^2 + 1)$  in der maximalen Definitionsmenge  $D_g \subseteq \mathbb{R}$ .
- 2.1 Zeigen Sie, dass gilt:  $D_g = [-1; 1]$ . (3 BE)
- 2.2 Ermitteln Sie  $g'(x)$  und die maximale Definitionsmenge  $D_{g'}$  von  $g'$ . (6 BE)
- (mögliches Teilergebnis:  $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$  für  $x \in ]0; 1[$ )
- 2.3 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die Koordinaten und die Art sämtlicher Extrempunkte des Graphen von  $g$ . Ermitteln Sie auch das Verhalten von  $g'(x)$  für  $x \rightarrow \pm 1$ . (6 BE)
- 2.4 Begründen Sie, dass sich  $g(x)$  für  $x \in [0; 1]$  schreiben lässt als  $g(x) = 2 \cdot \arcsin(x) + c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ , und bestimmen Sie  $c$ . (4 BE)
- 2.5 Begründen Sie, dass die Funktion  $h$  mit  $h(x) = g(x)$  für  $x \in D_h = [-1; 0]$  umkehrbar ist, und bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion  $h^{-1}(x)$  sowie die Definitionsmenge  $D_{h^{-1}}$ . (5 BE)
- 3 Ein Körper wird für  $t \geq 0$  durch eine zeitlich konstante Kraft beschleunigt und unterliegt einer zur Geschwindigkeit  $v(t)$  proportionalen Reibungskraft. Die Bewegung des Körpers wird dabei durch folgende Differenzialgleichung beschrieben  $10 \cdot \dot{v} + v = 40$  mit  $\dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ . Die Einheiten für  $t$  und  $v$  (Sekunde, Meter pro Sekunde) bleiben bei der Rechnung unberücksichtigt. Bestimmen Sie  $v(t)$  für  $t \geq 0$  mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten für die Anfangsbedingung  $v(0) = 10$ . (6 BE)

## Aufgabengruppe B

### B I

- 1 Bei der Firma Kohl kommen morgens alle im Büro Beschäftigten nacheinander ins Großraumbüro.
  - 1.1 Im Büro der Firma Kohl arbeiten 28 Personen, davon sind 75% Frauen. Berechnen Sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen es bei der Ankunft gibt, wenn man nur nach dem Geschlecht unterscheidet. (2 BE)
  - 1.2 Für ein neues Projekt wird eine Gruppe mit 10 Personen aus 5 Männern und 5 Frauen gebildet. Die Sitzungen finden an einem rechteckigen Tisch statt, der an beiden Seiten 5 Plätze hat. Ermitteln Sie, auf wie viele verschiedene Arten die Gruppenmitglieder Platz nehmen können, wenn die Personen unterschieden werden und
    - a) wenn die Männer und die Frauen geschlossen auf jeweils einer Seite sitzen,
    - b) wenn auf jeder Seite Männer und Frauen abwechselnd sitzen und jeweils eine Frau einem Mann gegenüber sitzt. (5 BE)
- 2 Die Firma Kohl produziert Pkw-Federbeine für die Autoindustrie. Für die Herstellung der Pkw-Federbeine werden Lager aus Gummi benötigt. Die Firma Kohl bezieht die Lager von zwei Produzenten. Beide Produzenten liefern nicht alle Lager maßgenau. Bei Produzent A müssen deshalb 1% der Lager nachgearbeitet werden und bei Produzent B sind es 3%.
  - 2.1 Die Firma Kohl muss Federbeine für den Bau von 250 Sonderfahrzeugen liefern. Dazu braucht sie pro Fahrzeug 4 Lager. Da der Auftrag sehr wichtig ist, verwendet sie nur Lager des Produzenten A. Berechnen Sie, wie viele Lager mindestens bereitgestellt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97,5% kein Lager A nachgearbeitet werden muss. (8 BE)
  - 2.2 Die Qualitätskontrolle von Kohl überprüft mit Stichproben die Güte beim Eingang der Lager des Produzenten B. Ermitteln Sie, wie viele Lager von B mindestens überprüft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens ein Lager gefunden wird, das nicht maßhaltig ist. (4 BE)
  - 2.3 Für eine Fertigungslinie der Firma Kohl werden 18 Lager von Firma A benötigt. Diese werden jeweils in einer Kiste zusammengestellt. Durch ein Versehen wurden in einer Kiste 10 A-Lager und 8 B-Lager zusammengebracht. Durch ein aufwändiges Prüfverfahren kann zwischen Lagern der Firmen A und B unterschieden werden. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei dieser Kiste mit der Untersuchung des zehnten Lagers das letzte der acht B-Lager gefunden wird. (3 BE)
- 3 Die Maßgenauigkeit zeigt sich auch bei der Masse der Lager. Deshalb erfolgt die Überprüfung durch Wiegen. Ein Lager der Firma B hat durchschnittlich eine Masse von 150 Gramm bei einer Standardabweichung von 2 Gramm. Berechnen Sie unter Annahme, dass die Masse normalverteilt ist, das Intervall um den Erwartungswert, in dem die Masse bei 96% der Lager liegt. Ermitteln Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse der Lager jeweils um höchstens 3 Gramm vom Erwartungswert abweicht. (6 BE)
- 4 Ein Transportunternehmen, das die Lager an die Firma liefert, hatte einen Unfall, so dass bei einer größeren Lieferung die Lager A und B gemischt wurden. Man weiß aber, dass in der Lieferung nur 4% der Lager von Produzent B sind. Durch den Massetest werden 95% der B-Lager als solche korrekt erkannt. Irrtümlicherweise werden 10% der A-Lager als B-Lager eingestuft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein durch den Test als A-Lager eingestuftes Lager auch wirklich ein A-Lager ist. (6 BE)
- 5 Bei der Überprüfung der Lieferung von Produzent B tauchen Probleme bezüglich der Qualität auf. Mit einer Stichprobe von 500 Stück soll auf dem 2%-Signifikanzniveau überprüft werden, ob die Angabe der Zulieferfirma B stimmt, dass höchstens 3% der Lager fehlerhaft sind. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und den Annahmehereich der Nullhypothese. (6 BE)

An einer Beruflichen Oberschule besuchen acht Schülerinnen und zehn Schüler die 13. Jahrgangsstufe in der Ausbildungsrichtung Technik. Der Mathematiklehrer hat zur ersten Unterrichtsstunde in Stochastik einen ungewöhnlichen „Würfel“ mitgebracht. Dieser hat die Form eines regelmäßigen Tetraeders und trägt auf seinen Seitenflächen die Zahlen 1, 2, 3 und 4. Nach jedem Wurf des Tetraeders gilt die Zahl (Augenzahl) als geworfen, die auf der unten liegenden Fläche steht.

- 1 Für die folgenden Teilaufgaben soll angenommen werden, dass alle Augenzahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten (Laplace-Tetraeder).
  - 1.1 Der Mathematiklehrer wirft das Tetraeder dreimal. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
    - A: „Es wird mindestens einmal die Augenzahl 2 geworfen“,
    - B: „Alle geworfenen Augenzahlen sind verschieden“,
    - C: „Es werden genau zwei gleiche Augenzahlen geworfen“. (5 BE)
  - 1.2 Nun wird das Tetraeder von den Schülerinnen und Schülern der Klasse 13T 1500-mal geworfen. Berechnen Sie, welche Anzahlen von Einsen dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 1% auftreten. (7 BE)
  - 1.3 Ermitteln Sie, wie oft man das Tetraeder mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% mindestens 1000-mal die Augenzahl 4 zu erhalten. (8 BE)
- 2 Die Schülerin Verena bringt zu einer Unterrichtsstunde in Stochastik ein äußerlich gleichartiges Tetraeder mit. Einige Mitschüler vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit die Augenzahl 1 zu werfen nicht 25% beträgt. Um dies zu überprüfen, wird das Tetraeder 500-mal geworfen. Entwickeln Sie einen geeigneten (zweiseitigen) Signifikanztest zur Überprüfung der Laplace-Eigenschaft des Tetraeders (Nullhypothese  $p=0,25$ ) und ermitteln Sie den Ablehnungsbereich und den Annahmehbereich der Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5%. (7 BE)
- 3 Der Schüler Anton und seine Freundin Beate haben zur Silvesterparty drei Schulfreunde mit deren Freundinnen eingeladen.
  - 3.1 Die Gäste treffen sich pünktlich vor dem Haus des Gastgebers und gehen zufällig verteilt nacheinander durch die Tür. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E_1$ : „Am Anfang und am Ende tritt ein Mädchen ein“. (3 BE)
  - 3.2 Als guter Gastgeber reicht Anton eine Pralinenschachtel mit zehn Schokoladenpralinen und fünf Marzipanpralinen. Einer der Gäste greift mit verbundenen Augen zufällig in die Schachtel, nimmt fünf Pralinen und erwischt alle fünf Marzipanpralinen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis  $E_2$ . (3 BE)
- 4 Das Schuljahr ist zu Ende. Zur Abschlussfeier an der Beruflichen Oberschule erhält der Vorsitzende des Fördervereins „Die Ehemaligen“ von einem ungenannten Sponsor als Werbegeschenk für die Absolventen einen Karton mit Billigkugelschreibern, die ausschließlich von den Firmen Atlas (A) und Salta ( $\bar{A}$ ) stammen. 10% der Kugelschreiber der Firma Atlas und 15% der Firma Salta sind fehlerhaft (F). 60% aller fehlerhaften Kugelschreiber stammen von der Firma Atlas. Ein Preisträger der Schule entnimmt dem Karton auf gut Glück einen Kugelschreiber. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kugelschreiber von der Firma Atlas stammt. (7 BE)