Mathematik

Abiturprüfung 2014

Prüfungsteil A (CAS)

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

5 **1** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$.

2 **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

3 **b)** Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

3 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_{a,c}: x \mapsto \sin(ax) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$.

3 **a)** Geben Sie für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für a und einen möglichen Wert für c so an, dass die zugehörige Funktion $g_{a,c}$ diese Eigenschaft besitzt.

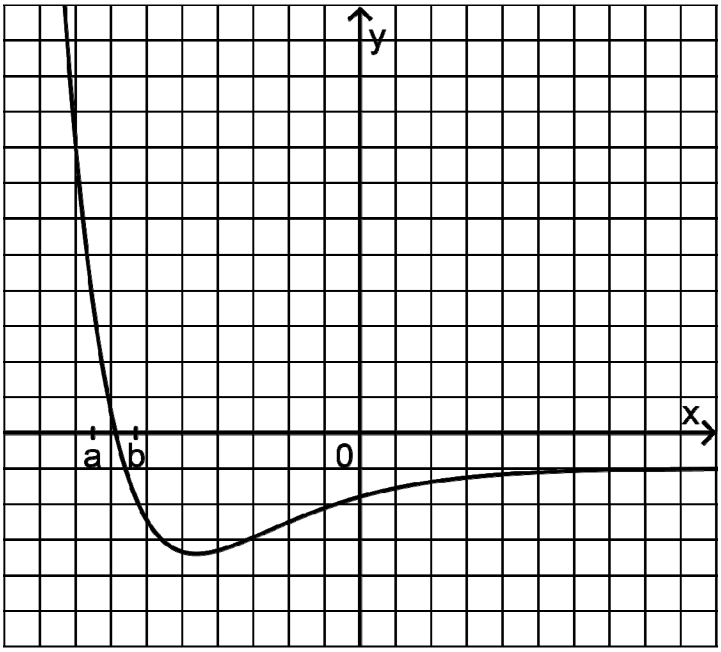
α) Die Funktion $g_{a,c}$ hat die Wertemenge $[0;2]$.

β) Die Funktion $g_{a,c}$ hat im Intervall $[0;\pi]$ genau drei Nullstellen.

2 **b)** Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, welche Werte die Ableitung von $g_{a,c}$ annehmen kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



2 **a)** Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

3 **b)** Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Geben Sie jeweils den Term einer in $\mathbb{R}$ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft hat.

1 **a)** Der Graph der Funktion g geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $x \mapsto \sin x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

1 **b)** Die Funktion h hat den Wertebereich $[1;3]$.

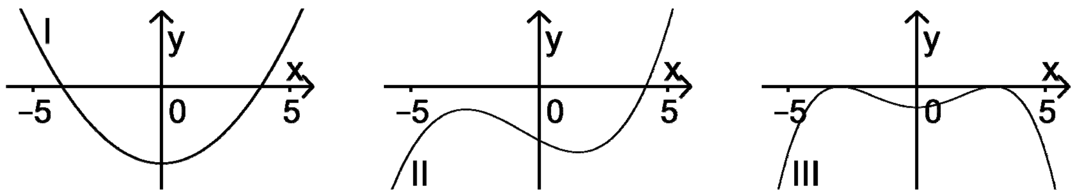
1 **c)** Die Funktion k besitzt die Periode π.

2 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$.

2 **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

3 **b)** Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt.

2 **3** Der Graph einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto g(x)$ besitzt für $-5 \leq x \leq 5$ zwei Wendepunkte. Entscheiden Sie, welcher der Graphen I, II und III zur zweiten Ableitungsfunktion g'' von g gehört. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



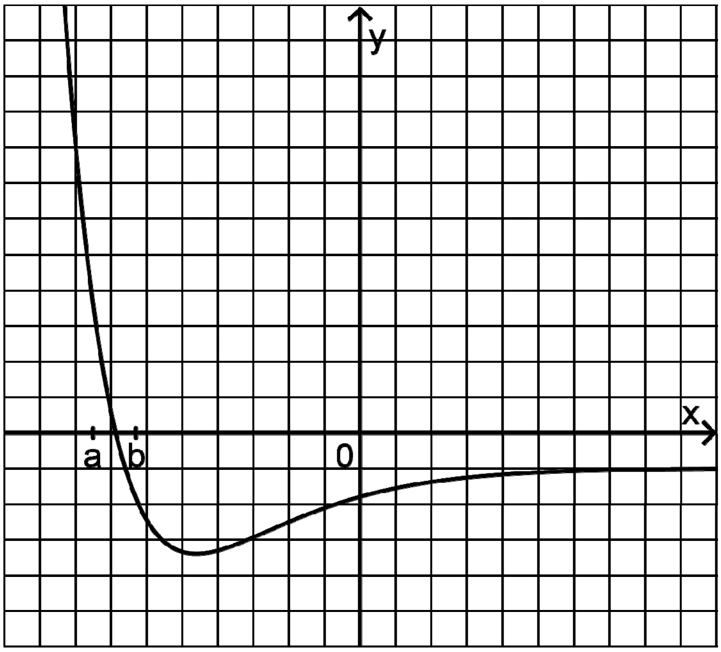
4 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{5x}{2x+1}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2 **a)** Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.

3 **b)** Zeigen Sie, dass die Werte der Ableitungsfunktion f' von f im gesamten Definitionsbereich von f positiv sind.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



2 **a)** Beschreiben Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f.

3 **b)** Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

2 **a)** Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

3 **b)** Betrachtet wird das Ereignis E: „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

2 **2** Betrachtet wird eine Bernoullikette mit der Trefferwahrscheinlichkeit 0,9 und der Länge 20. Beschreiben Sie zu dieser Bernoullikette ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $0{,}9^{20} + 20 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{19}$ angegeben wird.

3 **3** Die Zufallsgröße X kann die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X mit $p_1,\ p_2 \in [0; 1]$.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	p_2

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von X nicht größer als 2,2 sein kann.

10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

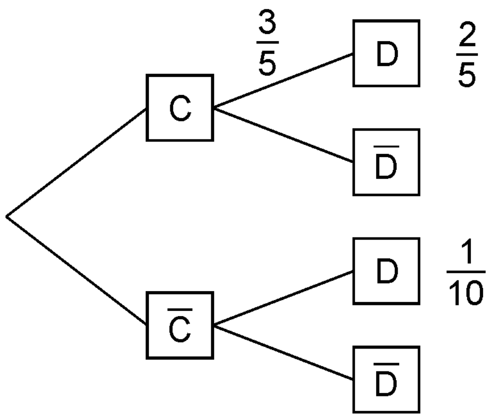
1 In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

2 **a)** Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.

3 **b)** Betrachtet wird das Ereignis E: „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

2 Das Baumdiagramm gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen C und D.



1 **a)** Berechnen Sie $P(\overline{D})$.

2 **b)** Weisen Sie nach, dass die Ereignisse C und D abhängig sind.

2 **c)** Von den im Baumdiagramm angegebenen Zahlenwerten soll nur der Wert $\frac{1}{10}$ so geändert werden, dass die Ereignisse C und D unabhängig sind. Bestimmen Sie den geänderten Wert.

10

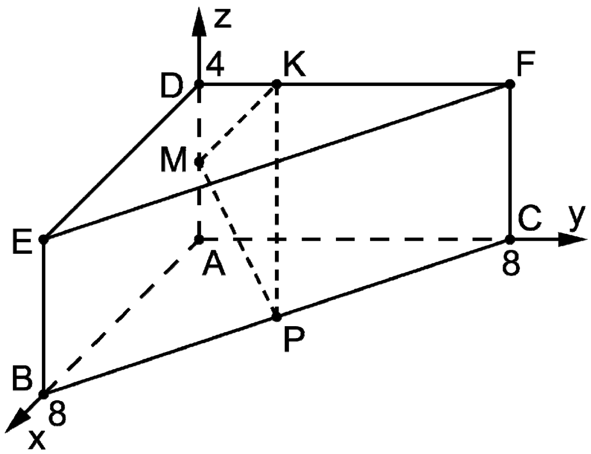
Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma ABCDEF mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.



2 **a)** Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F.

3 **b)** Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $[AD]$ bzw. $[BC]$. Der Punkt $K(0|y_K|4)$ liegt auf der Kante $[DF]$. Bestimmen Sie y_K so, dass das Dreieck KMP in M rechtwinklig ist.

2 Gegeben ist die Ebene $E: 3x_2 + 4x_3 = 5$.

1 **a)** Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

4 **b)** Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Kugel mit Mittelpunkt $Z(1|6|3)$ und Radius 7 die Ebene E schneidet.

10

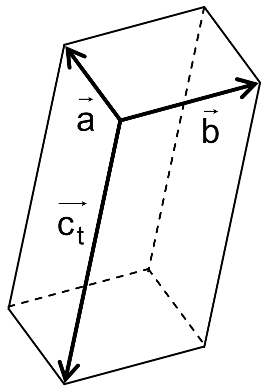
Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.



2 **a)** Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

3 **b)** Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

2 Eine Kugel besitzt den Mittelpunkt $M(-3\,|\,2\,|\,7)$. Der Punkt $P(3\,|\,4\,|\,4)$ liegt auf der Kugel.

3 **a)** Der Punkt Q liegt ebenfalls auf der Kugel, die Strecke $[PQ]$ verläuft durch deren Mittelpunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten von Q.

2 **b)** Weisen Sie nach, dass die Kugel die x_1x_2-Ebene berührt.

10

Mathematik

Abiturprüfung 2014

Prüfungsteil B (CAS)

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht,
- **ein Computeralgebrasystem, das den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.**

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____
Name des Prüflings

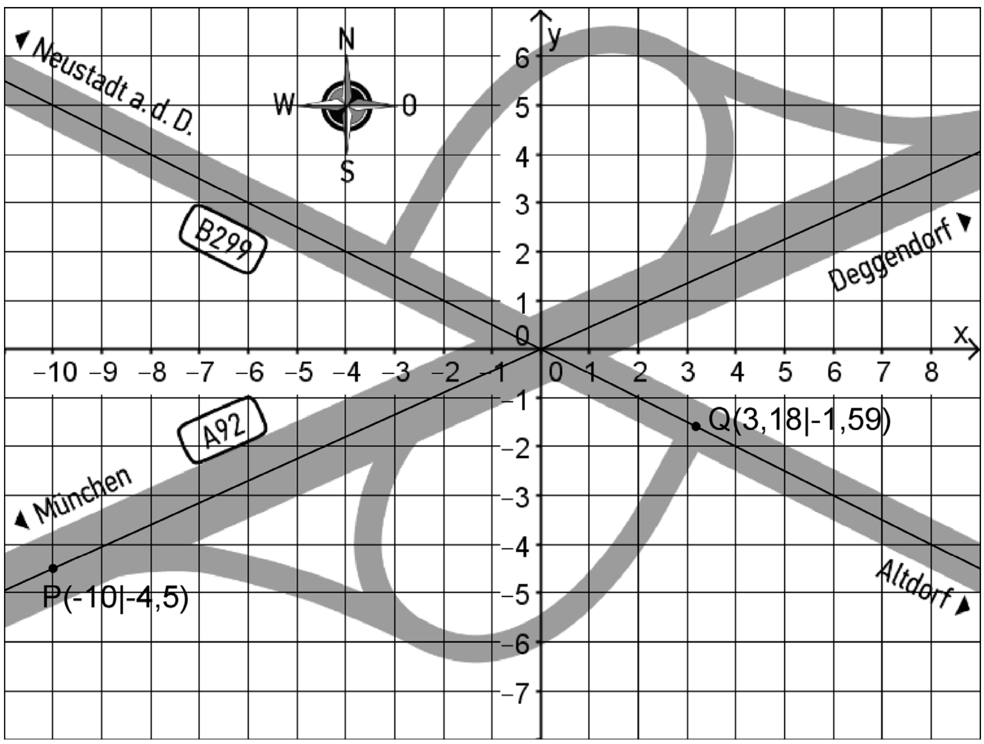
Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Die Abbildung zeigt schematisch die Anschlussstelle Altdorf bei Landshut, die die Autobahn A92 mit der Bundesstraße B299 verbindet. Im eingezeichneten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 20 m, d. h. die Abbildung stellt einen Bereich dar, der in West-Ost-Richtung eine Länge von 400 m hat. Im Folgenden soll die Breite der Straßen unberücksichtigt bleiben. Bei Verwendung des eingezeichneten Koordinatensystems kann die A92 im betrachteten Bereich modellhaft durch die Gerade mit der Gleichung $y = 0{,}45x$ beschrieben werden, die B299 durch die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}5x$.



3 **a)** Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Größe des Winkels, unter dem sich die A92 und die B299 kreuzen.

Fährt man aus München kommend von der A92 auf die B299 ab, so befährt man die südliche Ausfahrt, die im Modell im Punkt P anfängt und im Punkt Q endet. Der Verlauf dieser Ausfahrt soll im Modell durch eine ganzrationale Funktion s dritten Grades beschrieben werden, deren Graph durch die Punkte P und Q verläuft. Das Modell soll dabei in den Punkten P und Q den Forderungen gerecht werden, dass die Ausfahrt ohne Knick aus der A92 herausführt beziehungsweise senkrecht auf die B299 stößt.

6 **b)** Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem sich die Koeffizienten des Funktionsterms von s ermitteln lassen. Geben Sie für jede Gleichung an, welche Forderung an den Straßenverlauf damit berücksichtigt wird.

(Fortsetzung nächste Seite)

Im Folgenden soll für die Funktion s der Term

$$s(x) = 0{,}01156x^3 + 0{,}1771x^2 + 0{,}5230x - 5{,}416$$

verwendet werden.

2 **c)** Ein Pkw befährt von der A92 kommend die südliche Ausfahrt. Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Rechtskurve der Ausfahrt in eine Linkskurve übergeht.

2 **d)** Zeichnen Sie den Graphen der Funktion s zwischen den Punkten P und Q in die Abbildung ein. Berücksichtigen Sie insbesondere den Wendepunkt des Graphen und seinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

2 **e)** Untersuchen Sie auf der Grundlage des Modells rechnerisch, ob es auf der südlichen Ausfahrt einen Punkt gibt, in dem die Fahrtrichtung parallel zur B299 ist.

6 **f)** Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells den Inhalt des Flächenstücks in Quadratmetern, das von der A92, der B299 und der südlichen Ausfahrt eingeschlossen wird.

Die Lage eines geplanten Mobilfunk-Sendemasts wird im Modell durch den Punkt $T(6\,|\,-8)$ beschrieben.

3 **g)** Begründen Sie, dass der Term $\sqrt{(x-6)^2 + (s(x)+8)^2}$ den Abstand des Punkts T von einem Punkt des Graphen von s angibt.

4 **h)** Einer der Punkte der südlichen Ausfahrt hat vom Mobilfunk-Sendemast den geringsten Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand auf der Grundlage des Modells.

5 **i)** Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, so gilt für die Länge d dieses Kurvenstücks $d = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Da die B299 unter der A92 hindurchführt, liegt der Endpunkt der südlichen Ausfahrt in der Realität 4,7 Meter tiefer als ihr Anfangspunkt. Bestimmen Sie mithilfe des Modells das mittlere Gefälle der südlichen Ausfahrt in Prozent.

3 **j)** Die nördliche Ausfahrt soll im Modell durch eine Funktion t beschrieben werden, deren Graph aus dem Graphen der Funktion s durch Spiegelung am Koordinatenursprung hervorgeht, d. h. durch Spiegelung an der x- und an der y-Achse. Bestimmen Sie den Term von t.

4 **k)** Ein Pkw fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von $120\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf der A92. Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells die Zeit in Sekunden, die der Pkw auf dem abgebildeten Abschnitt der A92 unterwegs ist.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{20} \cdot (a - x) \cdot \sqrt{x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und maximalem Definitionsbereich D. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

2 **a)** Geben Sie D sowie die Nullstellen von f_a an.

5 **b)** Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts H_a, in dem G_a eine waagrechte Tangente besitzt. Begründen Sie, dass H_a ein Hochpunkt von G_a ist.

(Ergebnis: $H_a\left(\frac{a}{3} \,\middle|\, \frac{a\sqrt{3a}}{90}\right)$)

3 **c)** Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Ableitungsfunktion f_a' von f_a an. Geben Sie $\lim\limits_{x \to 0} f_a'(x)$ an und beschreiben Sie die Eigenschaft von G_a, die sich aus diesem Ergebnis folgern lässt.

4 **d)** Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den G_a die x-Achse unter einem Winkel der Größe 20° schneidet.

2 Nun wird die in $\mathbb{R}_0^+$ definierte Funktion $g : x \mapsto f_{75}(x)$ betrachtet. Dabei ist f_{75} die zu $a = 75$ gehörende Funktion der Schar aus Aufgabe 1, d. h. $g(x) = \frac{1}{20} \cdot (75 - x) \cdot \sqrt{x}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_g von g.

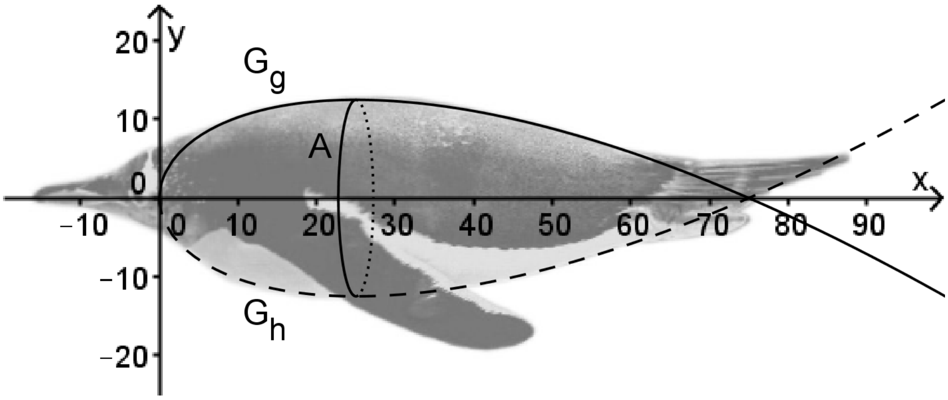


Abb. 1

Lässt man den Graphen G_g für $0 \le x \le 75$ um die x-Achse rotieren, so entsteht ein rotationssymmetrischer Körper. Bei Verwendung des eingezeichneten Koordinatensystems, in dem eine Längeneinheit 1 cm entspricht, stellt dieser Körper modellhaft den 75 cm langen Rumpf eines Eselspinguins dar.

1 **a)** Der in Abbildung 1 gestrichelt dargestellte Graph G_h gehört zur Funktion h, mithilfe derer sich im Modell die Bauchlinie des Eselspinguins beschreiben lässt. Geben Sie einen Term von h an.

(Fortsetzung nächste Seite)

Auf der Grundlage des Modells kann das Volumen des Rumpfs des Eselspinguins (in cm^3) mithilfe der Formel $V = \pi \cdot \int_0^{75} \left(g(x)\right)^2 dx$, die Oberfläche (in cm^2) mithilfe der Formel $O = 2\pi \cdot \int_0^{75} g(x) \cdot \sqrt{1 + \left(g'(x)\right)^2}\, dx$ bestimmt werden.

5 **b)** Ermitteln Sie auf der Grundlage des Modells für den Rumpf des Eselspinguins das Verhältnis der Oberfläche zum Volumen und tragen Sie den zugehörigen Punkt in Abbildung 2 ein.

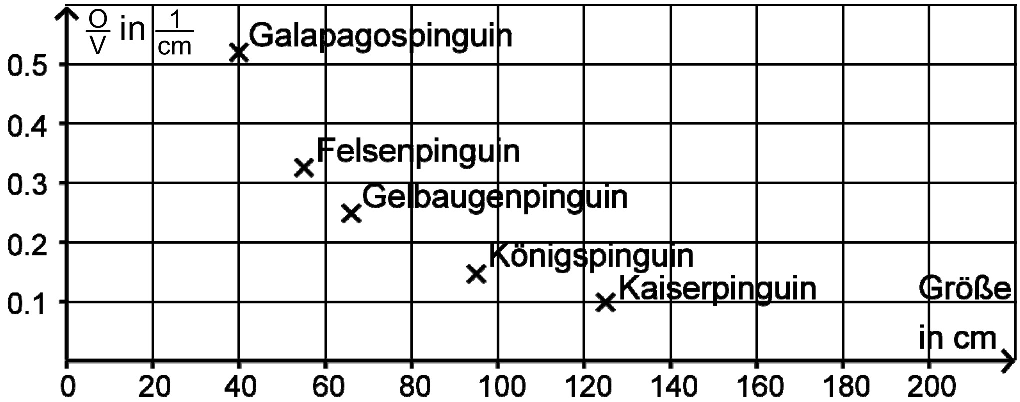


Abb. 2

(Teilergebnisse: Oberfläche: $4285\,cm^2$, Volumen: $20709\,cm^3$)

2 **c)** Für den Wärmeverlust eines Pinguinkörpers ist das Verhältnis der Oberfläche zum Volumen von großer Bedeutung. Entscheiden Sie mithilfe des in Aufgabe 2b ermittelten Verhältnisses, ob der Körper des Kaiserpinguins im Vergleich zum Körper des Eselspinguins für kältere oder wärmere Regionen geeignet ist. Machen Sie Ihre Entscheidung plausibel.

3 **d)** Unter allen Körpern mit einem vorgegebenen Volumen hat die Kugel die geringste Oberfläche. Berechnen Sie das Verhältnis der Oberfläche zum Volumen für eine Kugel, die das gleiche Volumen wie der Körper hat, der den Rumpf des Eselspinguins modellhaft darstellt.

5 **e)** Die an Land oft unbeholfen watschelnden Pinguine sind aufgrund ihrer strömungsgünstigen Körper äußerst energieeffiziente Schwimmer.

Als Maß für den Strömungswiderstand eines umströmten Körpers verwendet man in der Technik den sogenannten c_w-Wert. Das Produkt aus dem c_w-Wert und der maximalen Querschnittsfläche A eines Körpers (vgl. Abbildung 1) wird als Widerstandsfläche bezeichnet.

Die Widerstandsfläche des Eselspinguins beträgt $15\,cm^2$. Ermitteln Sie mithilfe des Modells rechnerisch den c_w-Wert des Eselspinguins.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Um den Luftwiderstand eines Pkw möglichst gering zu halten, soll die Karosserie dieses Pkw eine Form erhalten, die bei Verwendung des in Abbildung 3 eingezeichneten Koordinatensystems teilweise mithilfe des Graphen G_s der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $s: x \mapsto \frac{1}{50} \cdot (300 - x) \cdot \sqrt{x}$ modellhaft beschrieben werden kann.

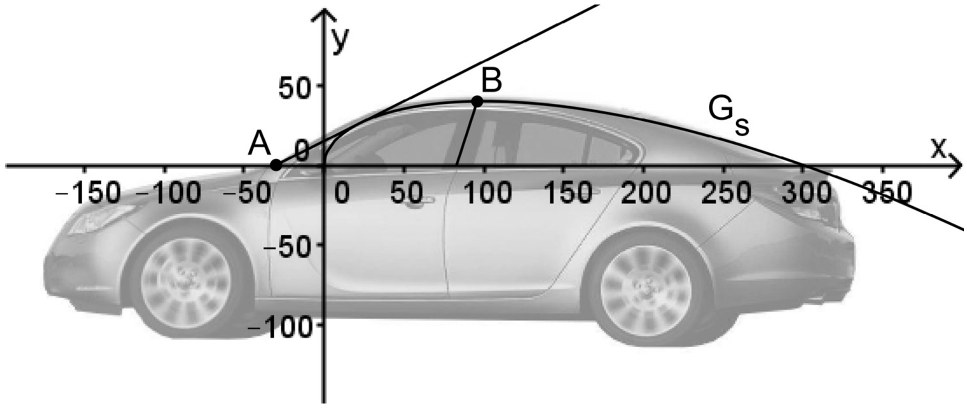


Abb. 3

Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 cm, d. h. der Pkw ist etwa 5 m lang.

2 **a)** Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion s aus dem Graphen der Funktion f_{300} hervorgeht. Dabei ist f_{300} die zu $a = 300$ gehörende Funktion der Schar aus Aufgabe 1.

4 **b)** Im Bereich der Windschutzscheibe soll das Modell um die durch den Punkt $A(-30 \mid 0)$ verlaufende Tangente an den Graphen von s ergänzt werden (vgl. Abbildung 3). Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung dieser Tangente.

4 **c)** Die Karosseriestrebe, die sich zwischen den Fenstern der vorderen und hinteren Tür befindet, soll im Modell durch eine im Punkt $(83 \mid 0)$ beginnende Strecke beschrieben werden, die gegenüber der x-Achse unter einem Winkel der Größe 72° geneigt ist und im Punkt $B(x_B \mid y_B)$ auf dem Graphen von s endet (vgl. Abbildung 3). Ermitteln Sie die Länge der Karosseriestrebe.

(Teilergebnis: $x_B \approx 96$)

40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Im Rahmen der sogenannten JIM-Studie wurde in Deutschland im Jahr 2012 der Umgang von Jugendlichen im Alter von 12 bis 19 Jahren mit Information und Medien untersucht. In der folgenden Tabelle werden ausgewählte Ergebnisse dieser Studie anhand einer repräsentativen Auswahl von 200 Jugendlichen wiedergegeben, von denen 102 Jungen sind. Dabei werden für vier Geräteklassen jeweils die Anzahl der Mädchen und die Anzahl der Jungen unter den 200 ausgewählten Jugendlichen angegeben, die ein entsprechendes Gerät besitzen.

	Mädchen	Jungen
Smartphone	42	52
Computer	77	87
Fernsehgerät	54	65
feste Spielkonsole	37	62

2 **1 a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person weiblich ist und kein Fernsehgerät besitzt.

2 **b)** Aus den 200 Jugendlichen wird eine Person zufällig ausgewählt, die ein Fernsehgerät besitzt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person weiblich ist.

2 **c)** Begründen Sie, dass die Ereignisse „Eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person besitzt ein Fernsehgerät.“ und „Eine aus den 200 Jugendlichen zufällig ausgewählte Person ist ein Mädchen.“ abhängig sind.

3 **d)** Der Studie zufolge besitzen 55 % der Mädchen im Alter von 12 bis 19 Jahren ein Fernsehgerät.

Geben Sie den Wert der Summe $\sum_{i=0}^{12} B(25; 0{,}55; i)$ in Prozent an. Begründen Sie, dass dieser Wert im Allgemeinen nicht die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass von den 25 Schülerinnen einer Klasse der Jahrgangsstufe 9 weniger als die Hälfte ein Fernsehgerät besitzt.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Der JIM-Studie zufolge besitzen deutlich weniger als 90 % der Jugendlichen einen Computer. Daher wird an den Stadtrat einer Kleinstadt der Wunsch herangetragen, im örtlichen Jugendzentrum einen Arbeitsraum mit Computern einzurichten. Der Stadtrat möchte die dafür erforderlichen finanziellen Mittel nur dann bewilligen, wenn weniger als 90 % der Jugendlichen der Kleinstadt einen Computer besitzen.

4 **a)** Die Entscheidung über die Bewilligung der finanziellen Mittel soll mithilfe einer Befragung von 100 zufällig ausgewählten 12- bis 19-jährigen Jugendlichen der Kleinstadt getroffen werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich bewilligt werden, soll höchstens 5 % betragen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel, bei der zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die finanziellen Mittel irrtümlich nicht bewilligt werden, möglichst klein ist.

3 **b)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 100 befragten Jugendlichen mindestens 85 einen Computer besitzen, wenn der Anteil derjenigen Jugendlichen, die einen Computer besitzen, unter den Jugendlichen der Kleinstadt ebenso groß ist wie unter den in der Tabelle erfassten Jugendlichen.

4 **3** Es ist zu vermuten, dass unter den Jugendlichen, die ein Smartphone besitzen, der Anteil derjenigen, die eine feste Spielkonsole besitzen, größer ist als unter den Jugendlichen, die kein Smartphone besitzen. Bestimmen Sie für die in der Tabelle erfassten 200 Jugendlichen, wie groß die Anzahl derjenigen Personen, die sowohl ein Smartphone als auch eine feste Spielkonsole besitzen, mindestens sein muss, damit die Vermutung für die in der Tabelle erfassten Jugendlichen zutrifft.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

1 In einem Supermarkt erhalten Kunden abhängig vom Wert ihres Einkaufs eine bestimmte Anzahl von Päckchen mit Tierbildern, die in ein Sammelalbum eingeklebt werden können. Jedes Päckchen enthält fünf Bilder. Im Sammelalbum sind Plätze für insgesamt 200 verschiedene Bilder vorgesehen. Die Bilder werden jeweils in großer Stückzahl mit der gleichen Häufigkeit produziert und auf die Päckchen zufällig verteilt, wobei sich die Bilder in einem Päckchen nicht unterscheiden müssen.

2 **a)** Begründen Sie, dass der Term $\frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf verschiedene Tierbilder befinden.

1 **b)** Geben Sie einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf gleiche Tierbilder befinden.

3 **c)** Einem Jungen fehlen in seinem Sammelalbum noch 15 Bilder. Er geht mit seiner Mutter zum Einkaufen und erhält anschließend zwei Päckchen mit Tierbildern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Päckchen nur Bilder enthalten, die der Junge bereits in seinem Sammelalbum hat.

Bei Kindern besonders beliebt sind die 3D-Bilder, auf denen die Tiere dreidimensional erscheinen. 20 der 200 für ein Sammelalbum vorgesehenen Bilder sind 3D-Bilder.

4 **d)** Ermitteln Sie, wie viele Päckchen ein Kind mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein 3D-Bild zu erhalten.

2 Um Geld für die Ausstattung des örtlichen Kindergartens einzunehmen, veranstaltet der Supermarkt ein Gewinnspiel. Die fünf Sektoren des dabei eingesetzten Glücksrads sind von 1 bis 5 durchnummeriert. Die Größe der Sektoren ist direkt proportional zum Zahlenwert der Nummern; beispielsweise ist der Sektor mit der Nummer 3 dreimal so groß wie der Sektor mit der Nummer 1. Nachdem der Spieler sechs Euro bezahlt hat, wird das Glücksrad einmal gedreht. Erzielt der Spieler eine der Nummern 1 bis 4, so wird ihm der zugehörige Zahlenwert als Betrag in Euro ausgezahlt, erzielt er die Nummer 5, so erhält er eine Eintrittskarte für einen Freizeitpark im Wert von fünfzehn Euro.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **a)** Bestimmen Sie die Größe des Öffnungswinkels des Sektors mit der Nummer 1 sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel eine Eintrittskarte gewinnt.

(Teilergebnis: Größe des Öffnungswinkels: 24°)

4 **b)** Berechnen Sie den Erwartungswert der Auszahlung pro Spiel, wenn der Gewinn einer Eintrittskarte mit einer Auszahlung von fünfzehn Euro gleichgesetzt wird. Interpretieren Sie das Ergebnis.

3 **c)** Der Supermarkt muss für jede Eintrittskarte nur zehn Euro an den Freizeitpark bezahlen. Damit ist bei der Spielaktion ein finanzieller Überschuss zu erwarten, der an den örtlichen Kindergarten gespendet werden soll. Ermitteln Sie den zu erwartenden Überschuss, wenn man davon ausgeht, dass das Spiel insgesamt 6000-mal durchgeführt wird.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$ das Dreieck ABC fest, das in der Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.

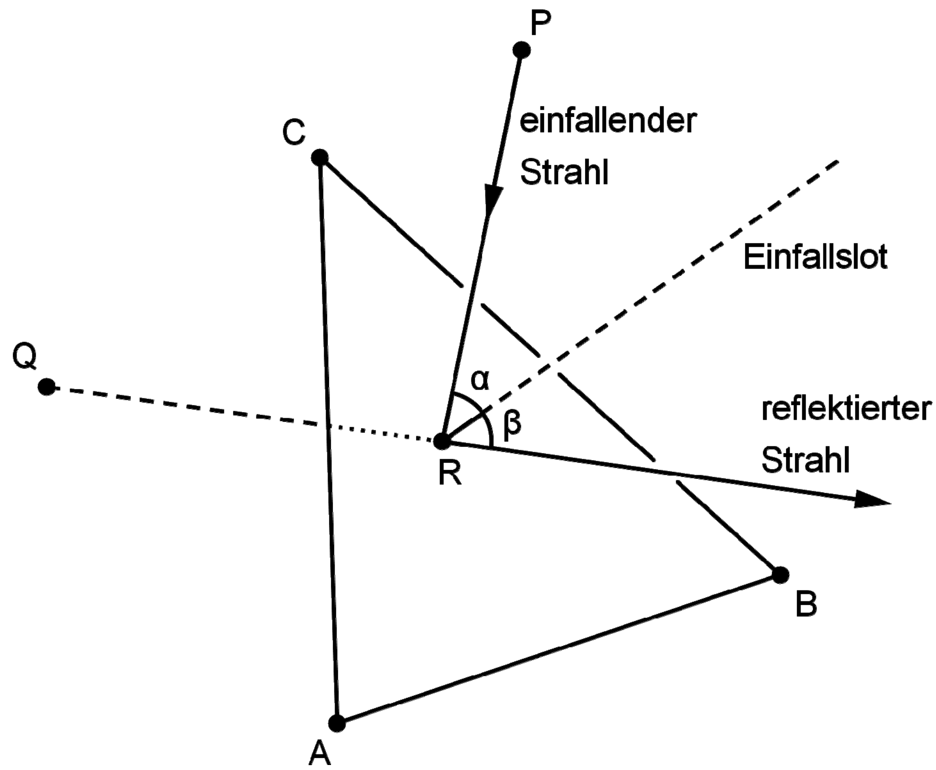
4 **a)** Bestimmen Sie den Flächeninhalt sowie den Umfang des Dreiecks ABC.

Das Dreieck ABC stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2|2|3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht. Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

4 **b)** Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

(zur Kontrolle: $R(1{,}5\,|\,1{,}5\,|\,1)$)

Der einfallende Lichtstrahl wird in demjenigen Punkt des Spiegels reflektiert, der im Modell durch den Punkt R dargestellt wird. Der reflektierte Lichtstrahl geht für einen Beobachter scheinbar von einer Lichtquelle aus, deren Position im Modell durch den Punkt $Q(0|0|1)$ beschrieben wird (vgl. Abbildung).



(Fortsetzung nächste Seite)

3 **c)** Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

Das Lot zur Ebene E im Punkt R wird als Einfallslot bezeichnet.

5 **d)** Die beiden Geraden, entlang derer der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl im Modell verlaufen, liegen in einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform. Weisen Sie nach, dass das Einfallslot ebenfalls in der Ebene F liegt.

(mögliches Teilergebnis: $F: x_1 - x_2 = 0$)

4 **e)** Zeigen Sie, dass die Größe des Winkels β zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot mit der Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot übereinstimmt.

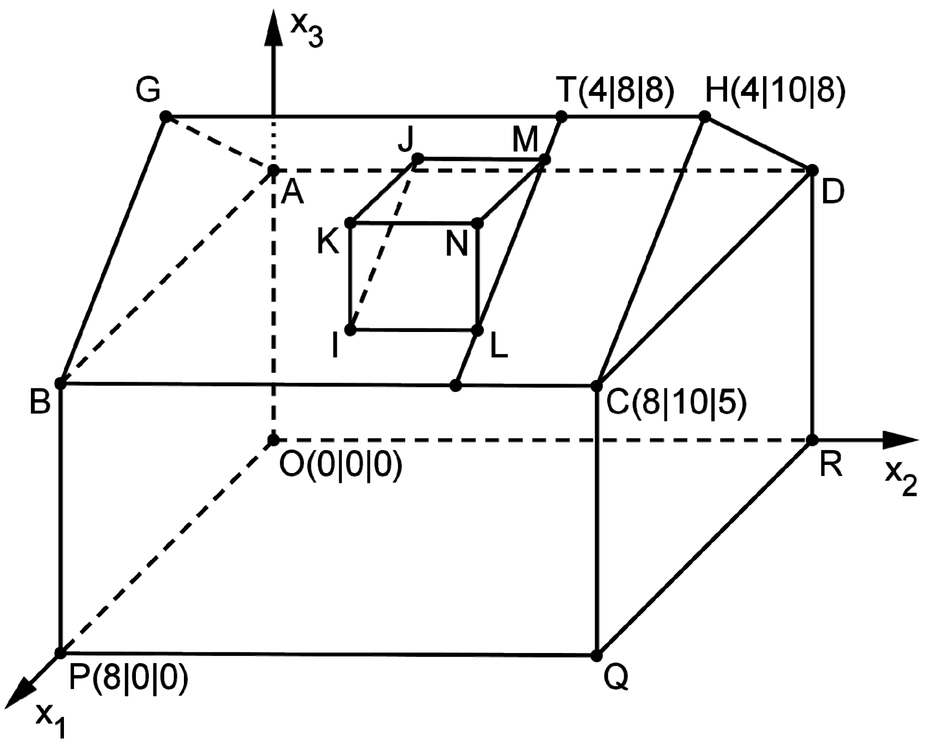
20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt modellhaft ein Einfamilienhaus, das auf einer horizontalen Fläche steht. Auf einer der beiden rechteckigen Dachflächen soll eine Dachgaube errichtet werden. Die Punkte A, B, C, D, O, P, Q und R sind die Eckpunkte eines Quaders. Das gerade dreiseitige Prisma LMNIJK stellt die Dachgaube dar, die Strecke $[GH]$ den First des Dachs, d. h. die obere waagrechte Dachkante. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. das Haus ist 10 m lang.



2 **a)** Berechnen Sie den Inhalt derjenigen Dachfläche, die im Modell durch das Rechteck BCHG dargestellt wird.

3 **b)** In der Stadt, in der das Einfamilienhaus steht, gilt für die Errichtung von Dachgauben eine Satzung, die jeder Bauherr einhalten muss. Diese Satzung lässt die Errichtung einer Dachgaube zu, wenn die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche des jeweiligen Hausdachs gegen die Horizontale mindestens 35° beträgt. Zeigen Sie rechnerisch, dass für das betrachtete Einfamilienhaus die Errichtung einer Dachgaube zulässig ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die Dachfläche, auf der die Dachgaube errichtet wird, liegt im Modell in der Ebene $E: 3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$.

Die Dachgaube soll so errichtet werden, dass sie von dem seitlichen Rand der Dachfläche, der im Modell durch die Strecke $[HC]$ dargestellt wird, den Abstand 2 m und vom First des Dachs den Abstand 1 m hat. Zur Ermittlung der Koordinaten des Punkts M wird die durch den Punkt $T(4|8|8)$ verlaufende Gerade $t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, betrachtet.

4 **c)** Begründen Sie, dass t in der Ebene E verläuft und von der Geraden HC den Abstand 2 besitzt.

3 **d)** Auf der Geraden t wird nun der Punkt M so festgelegt, dass der Abstand der Dachgaube vom First 1 m beträgt. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

(Ergebnis: M(4,8 | 8 | 7,4))

Die Punkte M und N liegen auf der Geraden $m: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 8 \\ 7{,}4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, die im Modell die Neigung der Dachfläche der Gaube festlegt. Die zur x_3-Achse parallele Strecke $[NL]$ stellt im Modell den sogenannten Gaubenstiel dar; dessen Länge soll 1,4 m betragen. Um die Koordinaten von N und L zu bestimmen, wird die Ebene F betrachtet, die durch Verschiebung von E um 1,4 in positive x_3-Richtung entsteht.

3 **e)** Begründen Sie, dass $3x_1 + 4x_3 - 49{,}6 = 0$ eine Gleichung von F ist.

2 **f)** Ermitteln Sie die Koordinaten von N.

(Ergebnis: N(7,2 | 8 | 7))

3 **g)** Bestimmen Sie die Koordinaten von L sowie den Abstand der Dachgaube von derjenigen Dachkante, die im Modell durch die Strecke $[BC]$ dargestellt wird.

20