Fachabiturprüfung 2014

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Mittwoch, 28. Mai 2014, 9.00 – 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

Aufgabengruppe A

A I

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}(x^3 - 4x^2 - 2x + 8)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Begründen Sie dann ohne weitere Rechnung, dass in den Intervallen $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ sowie $]\sqrt{2}; 4[$ jeweils eine Extremstelle liegt. Geben Sie auch deren Art an. (7 BE)

1.2 Berechnen Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. (5 BE)

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph G_f rechts- bzw. linksgekrümmt ist, sowie die Koordinaten des Wendepunkts. (4 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \le x \le 4{,}5$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

1.5 Die Gerade G_t enthält die Schnittpunkte des Graphen G_f mit der y-Achse und mit der x-Achse bei $x = 4$. Zeigen Sie, dass die Gerade G_t Tangente an G_f ist und zeichnen Sie G_t in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4 BE)

1.6 Die Graphen G_f und G_t schließen ein endliches Flächenstück ein.
Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

1.7 Gegeben ist zusätzlich die Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$ und es gilt:

$$f(x) - p(x) = -\frac{1}{4}(x^3 - 5x^2).$$

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f - p$ mit deren Vielfachheit und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieser Stellen für die Graphen der beiden Funktionen. (4 BE)

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$k_a: x \mapsto \frac{a}{4}\left[x^3 - (2a+2)x^2 + (8a-10)x + 8\right] \text{ mit } D_{k_a} = \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R}^+.$$

Fortsetzung siehe nächste Seite

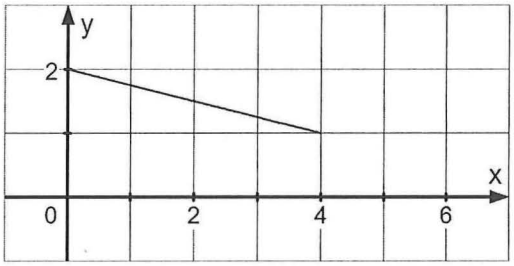
Fortsetzung A I

2.1 Berechnen Sie den Wert des Parameters a so, dass der Graph der Funktion k_a bei $x = 4$ die x-Achse als Tangente besitzt. (4 BE)

2.2 Untersuchen Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Graphen der Funktionen f (aus 1.0) und k_1 ($a = 1$) besteht. (2 BE)

3 Eine Kugel soll eine Bahn hinabrollen, die durch den Graphen G_h der Funktion

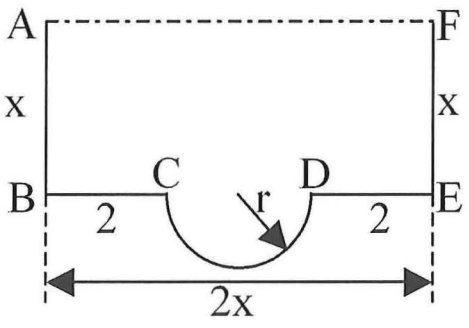
$$h: x \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ -\frac{1}{8}(x^2 - 6x) & \text{für } 4 < x \le 6 \end{cases}$$



beschrieben wird. Dabei ist der Graph von g das in oben stehender Skizze dargestellte Geradenstück.

Prüfen Sie durch Rechnung, ob die Bahn G_h an der Stelle $x = 4$ einen Sprung bzw. einen Knick aufweist. (7 BE)

4.0 Der Querschnitt eines Abflusskanals ist begrenzt durch ein Rechteck und einen Halbkreis mit Radius r. Alle Angaben sind in Meter. Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet.



4.1 Zeigen Sie, dass sich die Maßzahl A(x) der Querschnittsfläche des Kanals in Abhängigkeit von x durch $A(x) = (2 + 0{,}5\pi)x^2 - 2\pi x + 2\pi$ darstellen lässt. (5 BE)

4.2 Die Strecken [AB], [BC], [DE] und [EF] besitzen in der Summe höchstens eine Länge von 12 m. Weisen Sie nach, dass dann für die sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A der Funktion $A: x \mapsto A(x)$ gilt: $D_A =]2; 4]$. (3 BE)

4.3 Bestimmen Sie x so, dass die zugehörige Querschnittsfläche maximalen Inhalt annimmt. (4 BE)

4.4 Nun sei x = 4. Der Kanal ist bis 1 m unter der Oberkante gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Querschnittsfläche des Kanals ausgelastet sind. (3 BE)

Aufgabengruppe A

A II

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{4}{5}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Zeigen Sie, dass G_f für $x = \frac{5}{2}$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.

Bestimmen Sie mithilfe der maximalen Monotonieintervalle Art und Koordinaten aller Punkte auf G_f mit waagrechter Tangente. (8 BE)

1.2 Ermitteln Sie die Koordinaten aller Wendepunkte von G_f auf zwei Nachkommastellen gerundet. (4 BE)

1.3 Begründen Sie, dass f im Intervall $I =]3;4[$ genau eine Nullstelle x_0 besitzt. Ermitteln Sie ein Intervall $I_0 \subset I$ der Länge $\Delta x = 0{,}25$, das diese Nullstelle x_0 enthält. (5 BE)

1.4 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass sich die Graphen der Funktionen f und g, mit $g: x \mapsto -\frac{9}{8}x$ und $D_g = \mathbb{R}$, für $x = \pm 2$ berühren. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührpunkte. (6 BE)

1.5 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g im Bereich $-3 \le x \le 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. (6 BE)

1.6 Die Graphen G_f und G_g schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (4 BE)

2 Gegeben ist die allgemeine ganzrationale Funktion u vierten Grades durch $u(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a, b, c, d, e, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Geben Sie ohne Begründung und ohne Rechnung einen Überblick, wie viele Nullstellen (Anzahl und Vielfachheit!) die Funktion u haben kann. (4 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

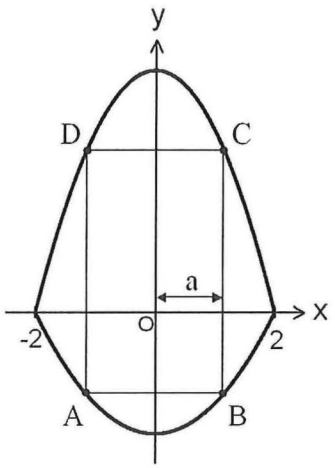
3.0 Gegeben sind mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$ die quadratischen Funktionen $h_k : x \mapsto kx^2 + (2k-1)\cdot x + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4k}$.

3.1 Untersuchen Sie, für welchen Parameterwert k der Graph von h_k symmetrisch zum Koordinatensystem ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. (3 BE)

3.2 Weisen Sie nach, dass $D = -k^3 + 4k^2 - 4k$ die Diskriminante der Gleichung $h_k(x) = 0$ ist. (4 BE)

3.3 Bestimmen Sie nun diejenigen Werte k, für die die quadratische Funktion h_k mindestens eine Nullstelle besitzt. (5 BE)

4.0 Die Graphen der reellen Funktionen p und q mit $p(x) = -x^2 + 4$ und $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und mit $D_p = D_q = [-2;2]$ bilden die nebenstehend abgebildete Fläche. Darin einbeschrieben ist das Rechteck ABCD, dessen Eckpunkte auf den Graphen der Funktionen p und q liegen.



4.1 Bestimmen Sie die Maßzahl A(a) der Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von a und geben Sie eine sinnvolle maximale Definitionsmenge D_A an. (4 BE)
[Mögliches Teilergebnis: $A(a) = -3a^3 + 12a$]

4.2 Bestimmen Sie a so, dass die zugehörige Fläche maximalen Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall die Maßzahlen für die Fläche, Breite und Länge des Rechtecks. (7 BE)

Aufgabengruppe S

S I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einer Casting-Show werden Models gekürt. Dazu gehen junge Damen einen Laufsteg entlang und präsentieren Kleider. Jedes Model hat genau einen Auftritt.

1.1 Zwei blonde (b), ein schwarzhaariges (s) und ein rothaariges (r) Model bereiten sich auf ihren Auftritt vor. Die Reihenfolge, in der die ersten drei Models aufgerufen werden, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.
Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller 12 Elementarereignisse. Begründen Sie, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt. (6 BE)

1.2 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1: „Das dritte Model hat rote Haare."
E_2: „Das erste Model ist nicht blond."
$E_3 = \overline{E_1 \cup \overline{E}_2}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2 und E_3. (4 BE)

2.0 Es steht eine große Zahl Kleider der Marken A, D, G und V zur Verfügung.
Im Folgenden werden fünf Auftritte des Models Eva betrachtet. Die Auswahl eines Kleides erfolgt zufällig, wobei das getragene Kleid wieder zurückgehängt wird und für einen weiteren Auftritt zur Verfügung steht.
Es gelten folgende Wahrscheinlichkeiten: $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(D) = \frac{1}{4}$ und $P(V) = \frac{1}{8}$.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
E_4 : „Eva trägt kein Kleid der Marke V."
E_5: „Eva trägt mehr als dreimal ein Kleid der Marke D."
E_6 : „Eva trägt jeweils genau zwei Kleider der Marke A hintereinander und der Marke G hintereinander." (7 BE)

2.2 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der von Eva getragenen Kleider der Marke A an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S I

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte der Zufallsgröße innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (5 BE)

3 $\frac{3}{4}$ von 24 Models tragen Schuhe einer bestimmten Marke (M). Neun der Models, die diese Schuhe tragen, klagen über Hautreizungen (H) an den Füßen. Insgesamt hat die Hälfte aller Models keine Hautreizungen.
Prüfen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel, ob die Ereignisse M und H stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie das Ergebnis im vorliegenden Zusammenhang. (5 BE)

4.0 Am Ende der Show bewerten die Zuschauer jedes Model. Eva hatte bei der letzten Bewertung eine Zustimmung von 60% erhalten. Es wird vermutet, dass Eva bei der nächsten Bewertung weniger Zustimmung bekommt (Gegenhypothese).
Zur Überprüfung der Vermutung wird eine Umfrage unter 200 Personen durchgeführt.

4.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den minimalen Annahmebereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. (5 BE)

4.2 Geben Sie an, wie man anhand des Tests (vgl. 4.1) entscheidet, wenn nur 55% der Befragten Eva die Zustimmung geben.
Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht und warum man seine Wahrscheinlichkeit nicht berechnen kann. (4 BE)

5 Das Monatsgehalt Y der Vorjahressiegerin der Casting-Show kann als Zufallsgröße mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden:

y in €	1000	2000	4000	10000	12000
P(Y = y)	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05

Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung geeignet graphisch dar und untersuchen Sie rechnerisch, ob das Model mit einem festen Monatsgehalt von 3540 € auf lange Sicht mehr verdienen würde. (4 BE)

Aufgabengruppe S

S II

Ein Onlineshop ist spezialisiert auf den Vertrieb von Gartengrills (mit Zubehör) an Endkunden. Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einer „Frühlingsaktion“ erhält jeder, der bei diesem Shop einen Grill bestellt, gratis einen von drei Zubehörartikeln. Der Kunde kann so zwischen einer Grillschürze (S), einer Reinigungsbürste (B) oder einer Grillzange (Z) auswählen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich 50% der Kunden für die Schürze, die übrigen wählen die Bürste bzw. die Zange. Im Folgenden wird die Wahl der Zubehörartikel für die nächsten beiden eingehenden Bestellungen zu dieser Frühlingsaktion als Zufallsexperiment betrachtet. Dabei ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit für zweimal Reinigungsbürste 4% beträgt.

1.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse.
[Teilergebnis: 30% wählen die Grillzange] (5 BE)

1.2 Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: „Genau eine Schürze wird bestellt.“
E_2: „Es wird keine Zange bestellt.“
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und überprüfen Sie beide Ereignisse auf Unvereinbarkeit. (4 BE)

2 In diesem Shop werden ausschließlich Holzkohle- und Gasgrills angeboten. Von 300 im letzten Monat verkauften Grills sind 80 Gasgrills. An Singlehaushalte gingen 30 Gasgrills. Größere Haushalte (zwei und mehr Personen) haben in diesem Zeitraum 180 Holzkohlegrills gekauft.
Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob der Kauf eines Gasgrills unabhängig von der Haushaltsgröße ist. (5 BE)

3 Von 1500 Kunden, die bei diesem Shop bisher einen Holzkohlegrill bestellten, wählten 600 einen Kugelgrill (geschlossen nutzbar), die anderen entschieden sich für ein Modell ohne Deckel. Es werden zwölf Bestellungen eines Holzkohlegrills zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E_3: „Genau fünf Kunden entschieden sich für einen Kugelgrill.“
E_4: „Nur der erste und der zweite Kunde wählten ein Modell ohne Deckel.“
E_5: „Mindestens zwei Kunden entschieden sich für einen Kugelgrill.“ (7 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S II

4 In dieser Saison ist der Gasgrill „Gourmet“ neu im Sortiment. Von allen verkauften Gartengrills sind 5% von diesem Typ. In der Versandabteilung müssen an einem späten Nachmittag noch zehn Gartengrills versandfertig verpackt werden. Ermitteln Sie, wie viele „Gourmet-Grills“ mindestens noch auf Lager sein müssten, damit deren Anzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% für diesen Nachmittag noch ausreicht. (3 BE)

5 Der Hersteller der „Gourmet-Grills“ verspricht, dass im Schnitt 97 von 100 produzierten Grills einwandfrei sind. Der Geschäftsführer des Onlineshops hat aufgrund der bisherigen Reklamationen den Eindruck, dass die Qualität der Grills deutlich geringer ist (Gegenhypothese).
Der Geschäftsführer schlägt daher vor, die nächsten 200 auszuliefernden Grills zu testen. Sind darunter mindestens 192 Grills einwandfrei, so wird er seine Zweifel an der Qualität verwerfen.
Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Erläutern Sie kurz den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit. (6 BE)

6.0 Zu Werbezwecken legt der Onlineshop jeder Bestellung eines Holzkohlegrills einzeln verpackte Grillanzünder-Würfel bei. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl dieser Würfel an, die Kunden gemäß einer Online-Befragung pro „Start“ ihres Grills verbrauchen. Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den noch zu bestimmenden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$a - 0{,}85$	0,10	$a \cdot b$	2b	0,15

6.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b, wenn bekannt ist, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 45% maximal zwei Würfel verwendet werden.
[Teilergebnis: $b = 0{,}20$] (4 BE)

6.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der verbrauchten Würfel innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (6 BE)