Fachabiturprüfung 2014 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Ausbildungsrichtung Technik

Mittwoch, 28. Mai 2014, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge D_f. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.
4	1.1	Zeigen Sie, dass gilt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.
3	1.2	Berechnen Sie die Nullstelle von f.
4	1.3	Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft.
7	1.4	Bestimmen Sie das Verhalten von f(x) bei Annäherung von x an die Definitionslücken sowie für $\lvert x \rvert \to \infty$ und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.
9	1.5	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f. [mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2}{x^2-4}$]
6	1.6	Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von f und die Koordinaten des Wendepunktes von G_f.
6	1.7	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von f zusammen mit seinen Asymptoten für $-5 \le x \le 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm
	1.8.0	Im vierten Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und der senkrechten Geraden g mit der Gleichung $x = 1$ ein endliches Flächenstück ein.
2	1.8.1	Ergänzen Sie in der Zeichnung aus 1.7 die Gerade g und markieren Sie das beschriebene Flächenstück.
6	1.8.2	Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto -\ln(2-x) - \ln(2+x) + x \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2+4x+4}\right)$ mit $D_F = [0;\, 2[$. Zeigen Sie, dass F für $x \in D_F$ eine Stammfunktion von f ist.
4	1.8.3	Berechnen Sie die Flächenmaßzahl A des Flächenstücks aus 1.8.0 und geben Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen gerundet an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A I:*	
	2.0	In einem Fluss nimmt das Wasser beim Fließen Sauerstoff aus der Luft auf. Außerdem wird im Wasser Sauerstoff durch bestimmte Arten von Algen in Abhängigkeit von der Sonnenlichteinstrahlung produziert. Gleichzeitig wird während des ganzen Tages Sauerstoff von allen Organismen im Wasser verbraucht.
		An einer bestimmten Messstelle ändert sich die Sauerstoffkonzentration k(t) in $\frac{\text{mg}}{\ell}$ des Flusswassers im Verlauf eines Tages sinusförmig mit der Periodendauer $T = 24$ h. Der Verlauf kann näherungsweise durch $k(t) = a \cdot \sin(bt + c) + d$ beschrieben werden, wobei t mit $0 \leq t \leq 24$ die seit 0 Uhr verstrichene Zeit in Stunden beschreibt.
		Kontinuierliche Messungen über einen ganzen Tag hinweg ergaben das Minimum der Sauerstoffkonzentration im Wasser von $4{,}20\frac{\text{mg}}{\ell}$ um 4.00 Uhr morgens und das Maximum von $11{,}8\frac{\text{mg}}{\ell}$ um 16.00 Uhr am Nachmittag. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
7	2.1	Geben Sie mit Begründung einen geeigneten Funktionsterm k(t) an und zeichnen Sie das Schaubild dazu. [Mögliches Teilergebnis: $k(t) = 3{,}8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) + 8$]
7	2.2	Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der die Abnahme der Sauerstoffkonzentration am größten war. Auf eine Untersuchung an den Rändern des Beobachtungszeitraums kann dabei verzichtet werden.
5	2.3	Berechnen Sie mittels Integration die mittlere Sauerstoffkonzentration des Flusswassers für den Zeitraum von 0.00 Uhr bis 10.00 Uhr auf eine Nachkommastelle genau.
70		

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE		
	1.0	Gegeben sind mit $a \in \mathbb{R}$ die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto 1 - \frac{(1-a)\cdot x + a^2}{x^2 + (1-a)\cdot x}$ in der jeweils größtmöglichen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{0; a-1\}$.
3	1.1	Zeigen Sie, dass gilt: $f_a(x) = \frac{(x+a)\cdot(x-a)}{x\cdot(x+1-a)}$.
4	1.2	Begründen Sie, warum der Graph von f_a für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nicht symmetrisch zum Koordinatensystem sein kann, und untersuchen Sie für a = 1 den Graphen von f_1 auf Symmetrie zum Koordinatensystem.
8	1.3	Bestimmen Sie Lage und Art der Definitionslücken von f_a in Abhängigkeit von a.
	1.4.0	Für a = 3 erhält man die Funktion f_3, die im Folgenden mit f bezeichnet wird, d.h. $f(x) = f_3(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x}$.
8	1.4.1	Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $\lvert x \rvert \to \infty$ und in der Nähe der Definitionslücken von f. Geben Sie auch die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an.
10	1.4.2	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f und ermitteln Sie damit Art und Lage der Extrempunkte des Graphen von f. Runden Sie dabei die Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. [mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-2x^2+18x-18}{(x^2-2x)^2}$]
6	1.4.3	Geben Sie die Nullstellen von f an und zeichnen Sie mit Hilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse und geeigneter, zusätzlich berechneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f mit seinen Asymptoten für $-5 \le x \le 10$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm
4	1.4.4	Zeigen Sie, dass für x < 0 die Funktion $F : x \mapsto x - 2{,}5\cdot\ln(2-x) + 4{,}5\cdot\ln(-x)$ mit $D_F =]-\infty; 0[$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE *Fortsetzung A II:*

5 **1.4.5** Der Graph von f schneidet die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten im Punkt P. Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise die Koordinaten des Punktes P. Beginnen Sie mit dem Startwert $x_0 = -1{,}5$ und führen Sie zwei Näherungsschritte durch. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

[Ergebnis: $P(-1{,}426 \mid -1{,}426)$]

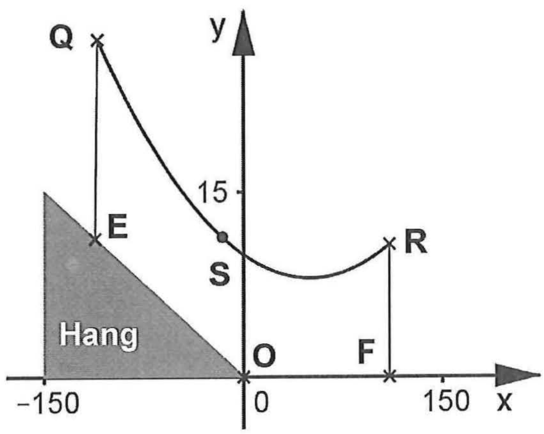
6 **1.4.6** Der Graph der Funktion f, die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten und die x-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück im Schaubild der Aufgabe 1.4.3 und berechnen Sie seine auf zwei Nachkommastellen gerundete Flächenmaßzahl mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 1.4.5.

2.0 Der Verlauf einer Hochspannungsleitung zwischen den Punkten Q und R wird für $x \in [-110; 110]$ näherungsweise durch die Gleichung

$$y = 333 \cdot \left(e^{\frac{x-50}{666}} + e^{-\frac{x-50}{666}}\right) - 658$$

beschrieben (siehe Skizze rechts).

Der Hang wird in der Skizze durch die Gerade OE mit der Gleichung $y = -0{,}1x$ begrenzt.



Auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind auf eine Nachkommastelle zu runden.

4 **2.1** Berechnen Sie die Masthöhen $\overline{EQ}$ und $\overline{FR}$.

5 **2.2** Berechnen Sie die Größe des Winkels φ, den die Hochspannungsleitung mit dem Mast im Punkt Q einschließt.

[mögliches Teilergebnis: $y'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x-50}{666}} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x-50}{666}}$]

7 **2.3** Der Punkt S ist derjenige Punkt der Leitung, der die geringste Entfernung vom Hang hat. Die Leitung hat dort die gleiche Steigung wie der Hang (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die x-Koordinate von S. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

[Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $u = e^{\frac{x-50}{666}}$]

70

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B I

BE

1.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O sind der Punkt $P(7\,|-2\,|\,8)$ und die Ebenen E, F und G_k mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben:

$E:\ -4x_1 - x_2 + x_3 + 18 = 0$; $F:\ 2x_1 + x_2 - 12 = 0$; $G_k:\ x_2 + x_3 + k = 0$.

4 **1.1** Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F.

[Mögliches Ergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$]

5 **1.2** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes R, der durch Spiegelung des Ursprungs O an der Geraden s hervorgeht.

4 **1.3** Bestimmen Sie alle Werte von k, für die die drei Ebenen E, F und G_k jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben.

6 **1.4** Zusätzlich sind die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und der Punkt $Q(4\,|\,4\,|\,2)$ gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf der Geraden h so, dass das Volumen der jeweiligen Pyramide $OPQS_1$ bzw. $OPQS_2$ die Maßzahl 27 hat.

2.0 Ein Fluglotse beobachtet zwei Flugzeuge gleichzeitig, deren jeweilige Positionen F_1 bzw. F_2 sich in einem geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ in einem bestimmten Zeitraum durch folgende Gleichungen beschreiben lassen:

$$\overrightarrow{OF_1} = \begin{pmatrix} -5,6 \\ -5,8 \\ 1,8 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix},\ t_1 \in [0;30]\ ;\quad \overrightarrow{OF_2} = \begin{pmatrix} -7,8 \\ 0,8 \\ 4,0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_2 \in [0;30]$$

Die Koordinaten von $\overrightarrow{OF_1}$ und $\overrightarrow{OF_2}$ haben die Einheit km, die Parameter t_1 und t_2 beschreiben jeweils die nach dem gleichzeitigen Beobachtungsbeginn verstrichene Zeit in Minuten. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.

5 **2.1** Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen schneiden, es aber zu keiner Kollision kommt.

6 **2.2** Weisen Sie nach, dass zum Zeitpunkt t ab Beobachtungsbeginn für den Abstand d(t) zwischen beiden Flugzeugen gilt: $d(t) = \sqrt{0,57t^2 - 9,24t + 53,24}$. Bestimmen Sie außerdem den Zeitpunkt t_{min} (gerundet auf eine Nachkommastelle), zu dem der quadrierte Abstand (also $d(t)^2$) am geringsten ist.

30

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B II

BE	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(1\|3\|-2)$, $B_k(k\|0\|1)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $C(-1\|6\|0)$ sowie die Ebene $E: 5x_1+2x_2+2x_3=4$ gegeben.
4	1.1	Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten X, Y und Z. Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide OXYZ.
3	1.2	Bestimmen Sie den Wert für k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB_k}$ und $\overrightarrow{AC}$ orthogonal zueinander sind.
6	1.3	Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Flächeninhalt F(k) des Dreiecks AB_kC minimal wird. Hinweis: Es genügt, den Term unter der Wurzel zu betrachten. [Mögliches Teilergebnis: $F(k)=\frac{1}{2}\sqrt{13k^2-38k+322}$]
	1.4.0	Die Ebene H_k enthält das Dreieck AB_kC und wird beschrieben durch die Gleichung $H_k: -15x_1-(2k+4)x_2+(3k-9)x_3=-12k-9$ (Nachweis nicht erforderlich).
4	1.4.1	Untersuchen Sie, für welche Werte von k sich die Ebenen E und H_k in einer gemeinsamen Geraden schneiden.
8	1.4.2	Berechnen Sie für k = 3 eine Gleichung der Schnittgeraden von E und H_3 sowie den Schnittwinkel zwischen E und H_3 auf eine Nachkommastelle gerundet.
5	1.4.3	Bestimmen Sie den Wert für k so, dass H_k den Ursprung enthält. Untersuchen Sie anschließend, ob in diesem Fall der Ursprung O im Inneren des Dreiecks AB_kC liegt. [Teilergebnis: k = –0,75]
30		