Abschlussprüfung Telekolleg/17

Fach: Mathematik am 17. Mai 2014 Arbeitszeit: 180 Minuten

Name des Prüflings: ______________________________

Maximale Punktzahl: 100	Erreichte Punktzahl: _____
	Note: _____

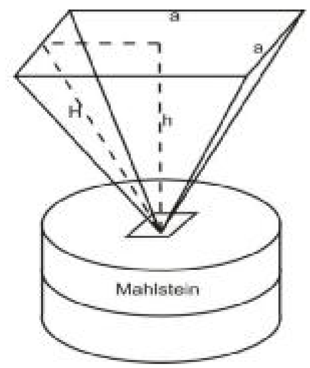
Zugelassene Hilfsmittel:

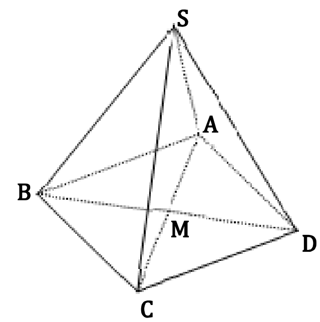
Taschenrechner (netzunabhängig, nicht programmierbar, nicht grafikfähig)
Formelsammlung

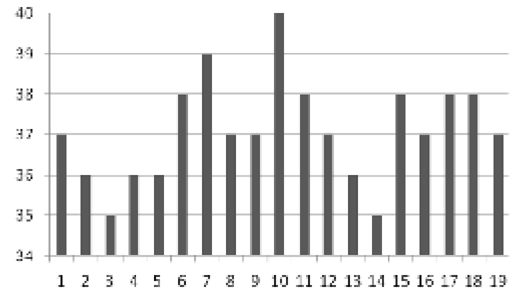
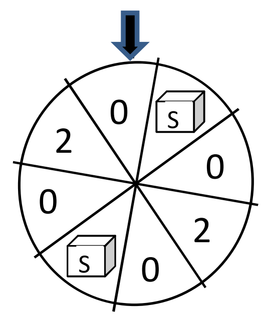
Aufgabenstellung:

Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.

Aufgabe I		BE
1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit reellen Koeffizienten *a, b, c* und *d* sowie $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion *f* in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_f. Die Funktion *f* besitzt bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 6$ Nullstellen, und der Graph G_f hat im Punkt $P(2/4)$ die Steigung $m = 1{,}5$.	
1.1	Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion *f*. $\left[\text{Ergebnis: } f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{4}x\right]$	6
1.2	Untersuchen Sie die Funktion *f* auf weitere Nullstellen und geben Sie diese gegebenenfalls an.	3
1.3	Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f.	6
1.4	Berechnen Sie den Schnittwinkel α $\left(\text{mit } \alpha < 90^\circ\right)$ des Graphen G_f mit der *y*-Achse.	3
1.5	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $P(2/4)$.	3
1.6	Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f in ein Koordinatensystem für $-7 \le x \le 7$. (Maßstab für beide Achsen: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm)	5
1.7	Stellen Sie den Funktionsterm $p(x)$ einer quadratischen Funktion *p* mit $p(x) = ax^2 + c$ $(a, c \in \mathbb{R})$ auf, deren Graph G_p den Graphen G_f im Punkt $P(2/4)$ berührt. $\left[\text{Ergebnis: } p(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}\right]$	4
1.8	Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts *S* der Parabel G_p. Zeichnen Sie die Parabel G_p in das unter 1.6 angelegte Koordinatensystem ein.	3
1.9	Die Graphen G_f und G_p schließen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie diese Fläche in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes dieser Fläche.	5

		BE
2.0	In einer alten Mühle muss der Getreidetrichter, durch den das Getreide auf den Mahlstein rieselt, erneuert werden. Der Trichter hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) und der Trichtertiefe h. Als einzige Abmessung ist H = 1,5m festgelegt. (siehe Skizze)  Hinweise: • Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch. • Volumen der Pyramide: $V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot h$	
2.1	Stellen Sie den Volumeninhalt $V(h)$ des Trichters in Abhängigkeit von der Trichtertiefe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: h \mapsto V(h)$ an. $\left[\text{mögliches Teilergebnis: } V(h)=3h-\frac{4}{3}h^3\right]$	5
2.2	Berechnen Sie die Trichtertiefe h, für die das Füllvolumen $V(h)$ des Trichters seinen größten Wert annimmt und bestimmen Sie das maximale Füllvolumen.	7
	Summe Aufgabe I:	50

Aufgabe II		BE
1.0	Die Punkte $A(0/-100/0)$, $B(100/-400/0)$ und $C(400/-300/0)$ sind die Eckpunkte der Grundfläche einer vierseitigen Pyramide in einem festgelegten Koordinatensystem. Senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Rechtecks $ABCD$ liegt die Spitze S der Pyramide in einer Höhe von 200 LE. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch. 	
1.1	Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und in B rechtwinklig ist.	4
1.2	Die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide ist quadratisch. Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunktes D und der Spitze S. [Teilergebnis: $S(200/-200/200)$]	4
1.3.0	Die Punkte A, B und S legen die Ebene E fest.	
1.3.1	Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in der Parameter- und in der Normalenform. [Mögliches Teilergebnis: $E: -6x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 200 = 0$].	5
1.3.2	Berechnen Sie den Flächeninhalt einer der vier Seitenflächen der Pyramide.	4
1.3.3	Ermitteln Sie den Neigungswinkel α einer Seitenfläche gegenüber der Grundfläche.	3
1.3.4	Vor der Seitenfläche ABS der Pyramide stand der Legende nach auf einer Anhöhe ein Fahnenmast, dessen Spitze F die Koordinaten $F(50/175/300)$ hatte. Im höchsten Stand der Sonne erzeugte das Sonnenlicht mit dem Richtungsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf der Seitenfläche ABS der Pyramide den Schattenpunkt F_S der Spitze F, der auf einen geheimen Eingang hinwies. Bestimmen Sie die Koordinaten von F_S.	5
	Summe Aufgabe II:	25

Aufgabe III		BE
1.0	Bei einer medizinischen Untersuchung werden die Schuhgrößen von 19 Kindern einer Grundschulklasse festgestellt. Die erhobenen Daten sind in nebenstehender Abbildung dargestellt. 	
1.1	Erstellen Sie eine Rangwertliste und berechnen Sie die Spannweite, den Median und den Modalwert der Datenreihe.	5
1.2	Ermitteln Sie den arithmetischen Mittelwert der Schuhgrößen.	2
2.0	Bei einem Kindergeburtstag wird das abgebildete Glücksrad aufgestellt. Jedes Kind darf einmal am Rad drehen. Zeigt beim Stillstand des Rades der Pfeil auf ein Päckchen, erhält das Kind einen Sachpreis S, bei einer „2" werden zwei Euro Taschengeld ausbezahlt. Bei einer „0" bekommt das Kind eine weitere Chance und darf das Glücksrad ein zweites Mal drehen. Damit ist ein „Spiel" auch beendet. 	
2.1	Der Ausgang eines Spiels wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Stellen Sie alle möglichen Spielverläufe in einem Baumdiagramm dar und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller fünf Elementarereignisse des Zufallsexperiments.	7
2.2	Betrachtet werden nun folgende Ereignisse: E_1: „Das am Glücksrad drehende Kind erzielt einen Gewinn." E_2: „Der Gewinn des Kindes beträgt zwei Euro." E_3: „Das mitspielende Kind erzielt erst beim zweiten Mal Drehen einen Gewinn." Berechnen Sie die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1, E_2 und E_3. (Teilergebnis: $P(E_1) = 0{,}75$)	6
2.3	Den Kindern gefällt das „Spiel" so gut, dass sie öfter am Glücksrad drehen wollen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse: E_4: „Bei genau neun von 20 Spielen erhält ein Kind keinen Gewinn." E_5: „Bei fünfmaligem Drehen wird nur im zweiten und vierten Spiel gewonnen."	5
	Summe Aufgabe III	25