Fachabiturprüfung 2015 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K
mit CAS

Ausbildungsrichtung Technik

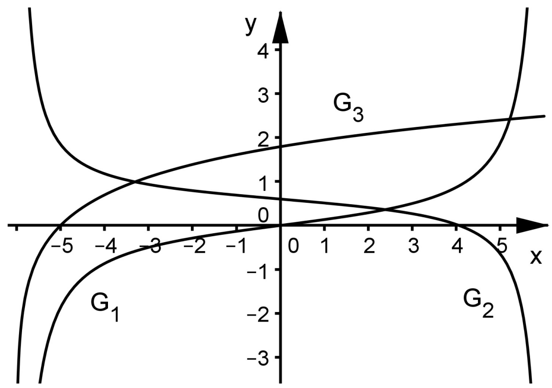
Freitag, 22. Mai 2015, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $g': x \mapsto \frac{1}{6+x}$ mit der Definitionsmenge $D_{g'} =]-6;6[$. Sie ist die Ableitungsfunktion der reellen Funktion g, welche die Definitionsmenge $D_g = D_{g'}$ besitzt.
4	1.1	Bestimmen Sie **ohne CAS** das Verhalten von $g'(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.
3	1.2	Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von g.
4	1.3	Geben Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus 1.1. und 1.2 für jeden der abgebildeten Graphen G_1, G_2 und G_3 eine kurze Begründung an, ob der jeweilige Graph der Graph der Funktion g sein kann.



5	1.4	Ermitteln Sie einen Funktionsterm $g(x)$ für den Fall, dass die Funktion g eine Nullstelle bei $x = -3$ hat
	2.0	Gegeben sind nun die reellen Funktionen g mit $g: x \mapsto \ln\left(2 + \frac{x}{3}\right)$ und f mit $f: x \mapsto g(x) - g(-x)$ und der Definitionsmenge $D_f = D_g =]-6;6[$ sowie dem zugehörigen Graphen G_f.
3	2.1	Weisen Sie **ohne CAS** nach, dass für den Funktionsterm von f gilt: $f(x) = \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right)$.
6	2.2	Berechnen Sie **ohne CAS** die Nullstelle von f und zeigen Sie **ohne CAS**, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
7	2.3	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.
5	2.4	Zeichnen Sie mit Hilfe bisheriger Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie die Wendetangente für $x \in D_f$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A I:*	
4	2.5	Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto x \cdot \ln\left(\frac{6+x}{6-x}\right) + 6 \cdot \ln\left(36 - x^2\right)$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$. Zeigen Sie **ohne CAS**, dass F eine Stammfunktion von f ist.
3	2.6	Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph von F keinen Wendepunkt besitzt.
	2.7.0	Die x-Achse, der Graph G_f und die Gerade mit der Gleichung x = k mit $0 < k < 6$ schließen ein endliches Flächenstück mit der von k abhängigen Maßzahl A(k) des Flächeninhalts ein.
4	2.7.1	Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für k = 4 in Ihrem Schaubild aus 2.4 und berechnen Sie die von k abhängige Maßzahl des Flächeninhalts A(k).
2	2.7.2	Berechnen Sie den linksseitigen Grenzwert des Flächeninhalts $A(k)$ für $k \to 6^-$ exakt.
	3.0	Bei der Synthese eines Medikaments wird die Temperatur $T(t)$ (in $^\circ C$) während der Reaktionsdauer t (in Minuten) mit $t \geq 0$ kontinuierlich gemessen. Dabei gilt: $T(t) = 10 \cdot \left(t \cdot e^{1-k \cdot t} + c\right)$ mit $k, c \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Temperatur von 18 °C gemessen. Nach einer Reaktionsdauer von 8 Minuten beträgt die Temperatur 47,43 °C. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.
4	3.1	Bestimmen Sie die Werte der Parameter c und k.
		Für die folgenden Teilaufgaben gilt: c = 1,8 und k = 0,25.
6	3.2	Berechnen Sie das Temperaturmaximum während der Reaktion.
6	3.3	Um die Qualität des Endprodukts nicht zu gefährden, darf in der Abkühlphase die Temperaturabnahme in jeder Minute höchstens 4 °C betragen. Zeigen Sie, dass dies selbst im Augenblick der stärksten Abkühlung eingehalten wird.
4	3.4	Nach längerer Zeit nähert sich die Temperatur T(t) wieder der Ausgangstemperatur von 18 °C an (Nachweis nicht erforderlich). Die Fläche zwischen der waagrechten Geraden mit der Gleichung a(t) = 18 und dem Graphen von T(t) ist proportional zur während der Synthese freigesetzten Energie. Weisen Sie nach, dass diese endlich ist.
70		

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

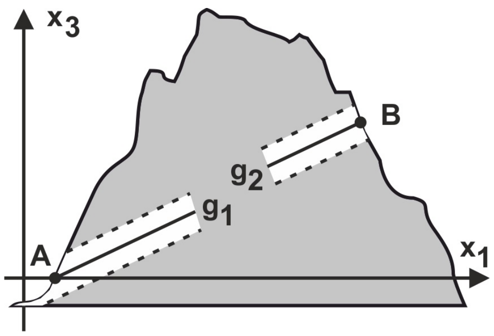
BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + a}{x - 2}$ mit der jeweils maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.
5	1.1	Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_{f_a} an und bestimmen Sie die Art der Definitionslücke von f_a in Abhängigkeit von a.
7	1.2	Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Lage und die Vielfachheiten der Nullstellen von f_a.
7	1.3	Ermitteln Sie für a > 0 das Monotonieverhalten der Funktion f_a sowie die Art und die Abszisse aller relativen Extrempunkte des Graphen von f_a.
4	1.4	Bestimmen Sie für a > 0 die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen von f_a.
	1.5.0	Für a = 1 erhält man die Funktion f_1, die im Folgenden mit f bezeichnet wird, d. h. $f(x) = f_1(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.
4	1.5.1	Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f. Geben Sie auch die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f an.
5	1.5.2	Zeichnen Sie unter der Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von f sowie sämtliche Asymptoten für $-2 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1LE = 1cm.
6	1.5.3	Der Graph von f und die Winkelhalbierende des I. Quadranten schließen mit den senkrechten Geraden mit den Gleichungen x = 3 und x = b mit $b \in \mathbb{R}$ und b > 3 ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 1.5.2 für b = 4. Bestimmen Sie **ohne CAS** anschließend den Wert von b so, dass der Flächeninhalt dieses Flächenstücks die Maßzahl 2 hat.
	2.0	Gegeben ist die reelle Funktion $g : x \mapsto \ln(f(x))$ mit der Funktion f aus 1.5.0 und der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$.
5	2.1	Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass für die Definitionsmenge D_g gilt: $D_g =]2;\infty[$. Untersuchen Sie weiterhin **ohne CAS** das Verhalten der Funktionswerte g(x) an den Rändern der Definitionsmenge D_g.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung A II:*	
5	2.2	Bestimmen Sie **ohne CAS** die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts des Graphen der Funktion g. [Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$]
4	2.3	Begründen Sie ohne Verwendung der 2. Ableitung von g, dass der Graph von g für $x > 3$ mindestens einen Wendepunkt besitzt.
	3.0	Um die Ausbreitung von Borkenkäfern in bayerischen Wäldern zu erforschen, wird der Befall eines ausgewählten Baumes über den Zeitraum von 12 Monaten untersucht. Die Anzahl der in diesem Baum befindlichen Borkenkäfer kann näherungsweise durch den Term $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2 - 12t)}$ mit $t, \lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $\lambda < 0$ beschrieben werden, wobei N_0 die Anzahl der Borkenkäfer zu Beginn des Beobachtungszeitraums und t die Zeit in Monaten ab Beobachtungsbeginn ist. Es ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach dem ersten Monat verdreifacht hat und nach einem weiteren Monat 133 Borkenkäfer gezählt wurden. Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden, sofern nicht anders gefordert. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
4	3.1	Bestimmen Sie λ und N_0. Runden Sie dabei N_0 auf eine ganze Zahl. Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $\lambda = -0{,}10$ und $N_0 = 18$.
5	3.2	Ab einem Befall von 540 Borkenkäfern gilt der Baum als dauerhaft geschädigt. Berechnen Sie **ohne CAS** den Zeitpunkt t_0, zu dem diese Anzahl erstmalig erreicht ist.
4	3.3	Bestimmen Sie **ohne CAS** den Zeitpunkt t_{max}, zu dem der Befall des Baumes am größten ist. [Mögliches Teilergebnis: $\dot{N}(t) = -3{,}6 \cdot e^{-0{,}10 \cdot (t^2 - 12t)} \cdot (t-6)$]
5	3.4	Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_v, zu dem sich die Borkenkäfer am stärksten vermehren.
70		

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B I

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebenen E_a und F sowie die Gerade h gegeben. Dabei gilt: $E_a: 2a \cdot x_1 - (a-1) \cdot x_3 + 2 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$. Die Ebene F enthält die Gerade h und verläuft parallel zur x_2-Achse.
3	1.1	Stellen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform auf. [Mögliches Teilergebnis: $F: x_1 + 2x_3 - 1 = 0$]
5	1.2	Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von h und E_a in Abhängigkeit von a.
5	1.3	Untersuchen Sie, ob sich die Ebenen E_a und F senkrecht schneiden können, und für welchen Wert von a die Ebenen E_a und F parallel sind.
7	1.4	Ermitteln Sie **ohne CAS** alle Werte von a, für die sich die Ebenen E_a und F unter einem Winkel von 45° schneiden.
	2.0	Beim Bau einer neuen Zahnradbahn ist ein Bergmassiv zu untertunneln (siehe Schnittskizze – nicht maßstäblich). Um die Bauzeit des Tunnels zu verkürzen, wird von den Punkten A und B aus gleichzeitig je eine zylinderförmige Tunnelröhre mit einem Radius von 2 m gebohrt.  Für die Berechnungen wird ein kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ verwendet, dessen x_1x_2-Ebene waagrecht verläuft. In diesem Koordinatensystem gilt $A(2\|100\|0)$ und $B(1002\|350\|254)$. Die Mittelachsen der Tunnelröhren liegen auf den Geraden g_1 bzw. g_2. Vom Punkt A aus wird in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und vom Punkt B aus in die Gegenrichtung gebohrt. Alle Koordinaten sind in Meter angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
5	2.1	Weisen Sie nach, dass der Punkt B genau 4 m oberhalb (in x_3-Richtung) von g_1 liegt.
5	2.2	Untersuchen Sie, ob bei diesen Verhältnissen die Tunnelröhren wenigstens teilweise aufeinander treffen.
30		

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B II

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden g_1, g_2 und die Ebene F gegeben: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$; $F: 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 11 = 0$.
4	1.1	Begründen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 eine Ebene E aufspannen, und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform. [Mögliches Teilergebnis: $E: x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 10 = 0$]
4	1.2	Die Ebenen E und F schneiden sich in der Geraden s. Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s. [Mögliches Ergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \sigma \in \mathbb{R}$]
4	1.3	Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Ebenen E und F. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.
5	1.4	Ermitteln Sie den Abstand der parallelen Geraden s und g_1.
	2.0	Zusätzlich zu den Ebenen E und F aus Aufgabe 1 sind nun die Ebenen $H_a: \ a x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 12$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.
3	2.1	Prüfen Sie **ohne CAS,** ob eine der Ebenen H_a zu F parallel ist.
6	2.2	Bestimmen Sie alle Werte von a so, dass für den Abstand d_a des Ursprungs O von der Ebene H_a gilt: $d_a = \frac{12}{11}$.
4	2.3	Bestimmen Sie **ohne CAS** den Wert von a, für den die Normalenvektoren der Ebenen E, F und H_a keine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
30		