Fachabiturprüfung 2015

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

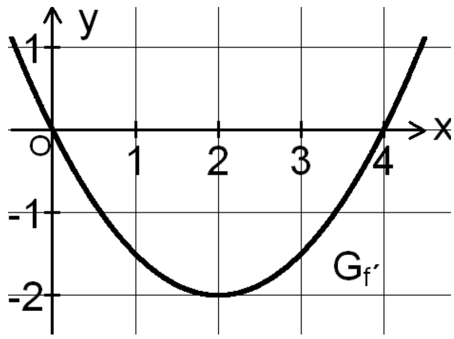
Freitag, 22. Mai 2015, 9.00 – 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

Aufgabengruppe A

A I

1.0 Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion einer in ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Alle im Folgenden zu entnehmenden Werte sind ganzzahlig.



1.1 Geben Sie nur mithilfe des Graphen $G_{f'}$ die maximalen Monotonieintervalle und die Wendestelle des Graphen der Funktion f an. Begründen Sie das Vorliegen der Wendestelle hinreichend. (6 BE)

1.2 Bestimmen Sie ausgehend vom Graphen $G_{f'}$ den Funktionsterm $f'(x)$ und dann den Funktionsterm $f(x)$ für den Fall, dass G_f den Ursprung enthält.

[Mögliches Teilergebnis: $f(x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2)$] (5 BE)

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit und ermitteln Sie unter Verwendung vorliegender Ergebnisse Art und Koordinaten der Extrempunkte und den Wendepunkt des Graphen G_f. (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und f' im Bereich $-2 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.5 Berechnen Sie die Maßzahl des im 4. Quadranten liegenden endlichen Flächenstücks, das nur von den Graphen G_f und $G_{f'}$ begrenzt wird und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. (7 BE)

2.0 Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{6}(x^3-6x^2) & \text{für } x<0 \\ \frac{1}{2}x^2-2x & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

2.1 Markieren Sie den Graphen der Funktion h farbig im vorhandenen Koordinatensystem und machen Sie damit Aussagen zur Stetigkeit und Diffe-

Fortsetzung siehe nächste Seite

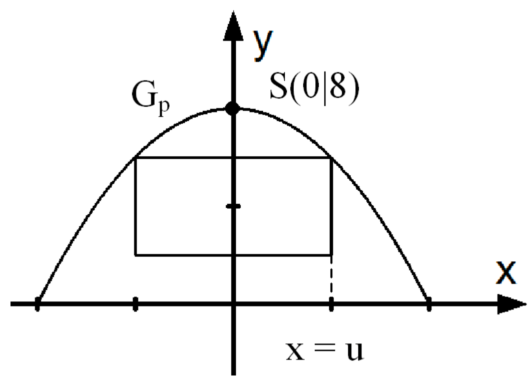
Fortsetzung A I

renzierbarkeit der Funktion h an der Stelle $x = 0$ (kurze Begründung erforderlich). (4 BE)

2.2 Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion h an. (4 BE)

2.3 Die Funktion $\tilde{h}$ entsteht aus h, wenn für $x \geq 0$ der Term $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ verwendet wird. Erläutern Sie, welche Aussagen man zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit von $\tilde{h}$ an der Stelle $x = 0$ machen kann. (3 BE)

3.0 Auf einem Campingplatz möchte der Pächter in einem Zelt ein Kino einrichten. Als Projektionsfläche dient eine Seitenwand, welche durch die Parabel G_p und der x-Achse begrenzt wird. Am Boden hat das Zelt eine Spannweite von 20 m. Bei den folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet.



3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ der Parabel G_p. (3 BE)

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = -0{,}08x^2 + 8$]

3.2 Es ist beabsichtigt, eine Leinwand von 7m x 4m anzubringen, wobei sich die Unterkante der Leinwand in einer Höhe von 3m befindet. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob dies an der Seitenwand möglich ist. (3 BE)

3.3.0 Ein Filmverleih rät dem Pächter zu einer Leinwand bei einer Unterkante in 3 m Höhe (siehe Skizze 3.0).

3.3.1 Stellen Sie die Maßzahl $A(u)$ des Flächeninhalts der Leinwand auf und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_A der Funktion $A: u \mapsto A(u)$. (7 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $A(u) = -0{,}16u^3 + 10u$]

3.3.2 Ermitteln Sie u so, dass $A(u)$ den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall Höhe, Breite und Flächeninhalt der Leinwand. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (7 BE)

Aufgabengruppe A

A II

1.0 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen
$f_a : x \mapsto a \cdot (x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

1.1 Zerlegen Sie $f_a(x)$ in Linearfaktoren und geben Sie die Nullstellen der Funktion f_a mit der jeweiligen Vielfachheit an. (6 BE)

1.2 Berechnen Sie den Wert von a so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f_a an der Stelle $x = -3$ die y-Achse bei $y = 5$ schneidet. (5 BE)

2.0 Nun wird $a = \frac{1}{8}$ gesetzt. Die Funktion $f_{1/8}$ wird im Folgenden mit f bezeichnet.
Es gilt: $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 - 7x + 4)$.

2.1 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f. (7 BE)

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem der Graph der Funktion f am stärksten fällt. (4 BE)

2.3 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen von f im Bereich $-5 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

3.0 Gegeben ist ferner die quadratische Funktion p mit $p''(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$, wenn der Punkt $A(-4|8)$ auf der Parabel G_p und ihr Scheitel bei $x_S = -\frac{1}{8}$ liegt. (5 BE)
[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{4}x + 1)$]

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen p und f (mit f aus 2.0) und zeichnen Sie die Parabel G_p für $-4 \le x \le 4$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (9 BE)

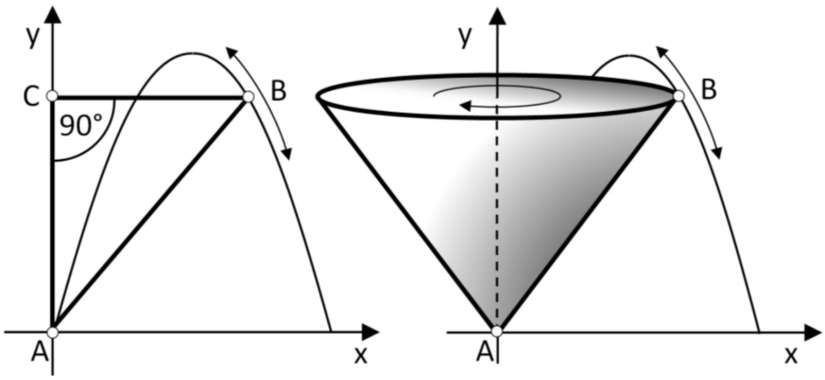
3.3 Geben Sie die Lösung der Ungleichung $p(x) - f(x) > 0$ an und erläutern Sie, was das Ergebnis für die Graphen G_f und G_p bedeutet. (2 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

3.4 Die Graphen G_f und G_p schließen im II. Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück ein. Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. (5 BE)

4.0 Das Dreieck ABC in nebenstehender Abbildung rotiert um die y-Achse, und dabei entsteht ein Kegel.



Der Punkt A ist der Urspung des Koordinatensystems und der Punkt B liegt im I. Quadranten auf der Parabel G_q mit $q(x) = -x^2 + 8x$ und $x \in \mathbb{R}$.

4.1 Stellen Sie eine Gleichung $V(r)$ für das Volumen des Kegels auf, wobei $r = \overline{BC}$ der Radius des Kegels ist. (3 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$]

4.2 Ermitteln Sie die maximale sinnvolle Definitionsmenge D_V der Funktion $V: r \mapsto V(r)$. (3 BE)

4.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass das Kegelvolumen seinen absolut größen Wert annimmt, und berechnen Sie das maximale Kegelvolumen. (7 BE)

Aufgabengruppe S

S I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein neues Medikament wird vor der Markteinführung einem klinischen Test unterzogen. Dabei erhält die Hälfte der am Test teilnehmenden Patienten das neue Medikament (M). 30% aller Patienten bekommen ein entsprechendes, schon auf dem Markt vorhandenes Alternativmedikament (A) und der Rest Placebos (P) ohne medizinische Wirkstoffe. Bei 70% der Patienten, die das neue Medikament bekommen haben, stellt sich eine Besserung (B) ein. Bei den Patienten, denen das Alternativmedikament verabreicht wurde, gibt es bei 40% eine Besserung. Insgesamt konnte bei 57% aller getesteten Patienten eine Besserung beobachtet werden.

1.1 Bestimmen Sie mithilfe eines vollständigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse und beschreiben Sie das Ereignis $E_1 = \{M\overline{B}; A\overline{B}\}$ möglichst einfach mit Worten. (6 BE)
[Teilergebnis: $P(\{PB\}) = 0{,}1$]

1.2 Beim klinischen Test mit insgesamt 400 Teilnehmern sind bei 12% Nebenwirkungen (N) aufgetreten. Die Hälfte aller Teilnehmer hat das neue Medikament M bekommen. 168 Personen haben M erhalten, und es sind keine Nebenwirkungen aufgetreten. Untersuchen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Ereignisse M und N auf stochastische Abhängigkeit. (5 BE)

2.0 Ein Medikament wird in zwei Varianten (normal und plus) sowie in drei verschiedenen Packungsgrößen (N1, N2 und N3) angeboten. Der Verkaufspreis in Euro wird als Zufallsgröße X aufgefasst. Dabei ergibt sich mit $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Art	N1	N1plus	N2	N2plus	N3	N3plus
x	5	7	9	12	22	28
P(X=x)	0,1	a	b	$b-0{,}05$	$a+0{,}15$	2a

2.1 Bestimmen Sie die Werte von a und b, wenn $E(X) = 18{,}48$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar. (7 BE)
[Teilergebnis: $a = 0{,}16$]

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S I

2.2 Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 2.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Zufallswerte um mehr als die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert unterscheiden und schraffieren Sie die zugehörige Fläche im Histogramm von 2.1. (6 BE)

3.0 Bei den Kunden einer bestimmten Apotheke wird eine Umfrage zu ihrem Kaufverhalten durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Kunde ein bestimmtes Medikament kauft, beträgt $p = 0{,}35$.

3.1 Es werden 50 Kunden befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
E_2: „Mindestens 13 aber weniger als 21 Kunden kaufen das Medikament."
E_3: „Weniger als 11 Kunden kaufen das Medikament." (3 BE)

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_4: „Von 10 Kunden kaufen nur genau der 2., 5. und 9. das Medikament."
E_5: „Von 10 Kunden kaufen genau drei das Medikament und diese folgen aufeinander." (3 BE)

4 Für ein weiteres Medikament gilt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer von zwei befragten Kunden dieses Medikament kauft, $\frac{15}{32}$ beträgt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein beliebiger Kunde dieses Medikament kauft (2 Lösungen). (4 BE)

5 Der Hersteller gibt an, dass ein bestimmtes Medikament bei 70% der Patienten, denen es verabreicht wird, wirksam ist. In einer Klinik wird vermutet, dass der Anteil der Patienten, bei denen das Medikament nicht wirkt, sich erhöht hat (Gegenhypothese) und man führt einen Signifikanztest mit 200 Patienten durch.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an.
Berechnen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn das Medikament bei 73 Patienten unwirksam ist? (6 BE)

Aufgabengruppe S

S II

1.0 Die zwei Freundinnen Anna und Eva besuchen das örtliche Volksfest. Im Festzelt wird ein besonderes Glücksspiel angeboten:
Gegen eine Teilnahmegebühr von 2,00 € kann bis zu zweimal an einem Glücksrad gedreht werden. Das Glücksrad hat 36 Sektoren, davon sind 18 Sektoren rot (r), 12 gelb (g) und 6 schwarz (s). Wenn der Spieler ein rotes Feld trifft, darf er kein zweites Mal drehen. Trifft der Spieler zweimal ein gelbes oder schwarzes Feld, so erhält er seinen Einsatz zurück. Trifft der Spieler jedoch beim ersten Drehen die Farbe Gelb und im zweiten die Farbe Schwarz, so bekommt er eine Getränkemarke im Wert von 9 €. Trifft der Spieler hingegen beim ersten Mal ein schwarzes Feld und beim zweiten Mal ein gelbes Feld, so erhält er zwei Getränkemarken im Wert von insgesamt 18 €. In allen anderen Fällen geschieht keine Auszahlung.

1.1 Erstellen Sie für dieses Glücksspiel ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse. (5 BE)
$[\text{Teilergebnis}: P(\{gg\}) = \frac{1}{9}]$

1.2 Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: „Es wird ein rotes Feld getroffen."
E_2: „Es wird zweimal dieselbe Farbe getroffen."
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten. (3 BE)

1.3 Die Zufallsgröße X beschreibt den Reingewinn, den der Festwirt durch ein Spiel des Glücksspiels erhält. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in tabellarischer Form und geeignet graphisch dar. (4 BE)

1.4 Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X und interpretieren Sie den Erwartungswert im Sinne der vorliegenden Thematik. (4 BE)

1.5 Anna und Eva spielen insgesamt zehnmal.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_3: „Gelb/Gelb erscheint nur genau beim vierten und fünften Spiel."
E_4: „Beim ersten und letzten Spiel erscheint Rot, dazwischen genau dreimal Gelb/Gelb, und zwar jeweils hintereinander." (4 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S II

2.0 Anna und Eva versuchen ihr Glück an der Schießbude. Sie schießen jeweils einmal. Anna trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 32% (Ereignis A), Eva mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% (Ereignis E). Die Wahrscheinlichkeit, dass beide treffen, liegt bei 20,8%.

2.1 Berechnen Sie mithilfe einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den beiden Mädchen
a) keine trifft,
b) genau eine trifft,
c) höchstens eine trifft. (5 BE)

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{\overline{A} \cap E}$ und beschreiben Sie dieses Ereignis möglichst einfach in Worten. (3 BE)

2.3 Untersuchen Sie die Ereignisse A: „Anna trifft“ und E: „Eva trifft“ auf stochastische Unabhängigkeit. (2 BE)

3.0 Im Festzelt treffen Anna und Eva auf Dora, Max, Horst und Klaus.

3.1 Die sechs jungen Leute bilden bei einer Polonaise eine „bunte“ Reihe, d. h. abwechselnd Mädchen und Junge. Berechnen Sie, wie viele Anordnungen hierfür möglich sind. (2 BE)

3.2 Bei einer zweiten Polonaise ist Max nicht dabei, da er mit einem Mädchen am Nebentisch flirtet. Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es jetzt für die „bunte“ Reihe gibt. (2 BE)

4 „Jedes 4. Los gewinnt“ behauptet der Werbeslogan einer Losbude. Die misstrauische Eva glaubt diese Behauptung nicht. Sie glaubt, dass weniger Lose gewinnen (Gegenhypothese). Dies soll anhand einer Stichprobe von 50 Losen getestet werden.
Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 10 Gewinnlose in der Stichprobe enthalten sind? (6 BE)