ABITURPRÜFUNG 2015 AN BERUFSOBERSCHULEN

UND FACHOBERSCHULEN

ZUR ERLANGUNG DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE

MATHEMATIK

Ausbildungsrichtung Technik

Freitag, den 22. Mai 2015, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A
A I

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \frac{2e^x}{a+e^{2x}}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a sowie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern von D_{f_a}. (7 BE)

Im Folgenden gilt nun a>0.

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes. (mögliches Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{2e^x(a-e^{2x})}{(a+e^{2x})^2}$) (8 BE)

1.3 Zeigen Sie, dass der Graph von f_a symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \ln(\sqrt{a})$ verläuft. (4 BE)

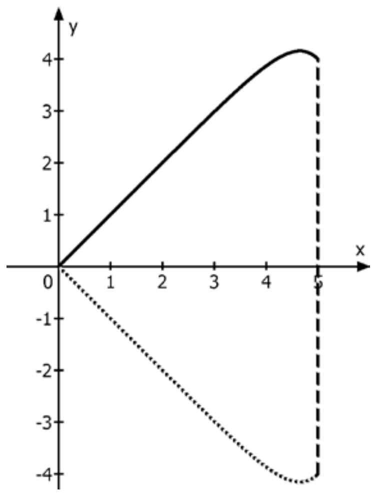
2 Gegeben ist nun die Funktion $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$ mit der Definitionsmenge $D_g =]\,0\,;+\infty\,[$.

2.1 Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten und die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von g und geben Sie die Wertemenge von g an. (11 BE)
(mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{2-\ln(x)}{4x\cdot\sqrt{x}}$)

2.2 Gegeben ist weiter die Integralfunktion G durch $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_G = D_g$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von G. (7 BE)

2.3 Die Funktion h ist festgelegt durch $h(x) = \arccos(g(x))$, $D_h = [0{,}5;+\infty[$. Untersuchen Sie, ob die Funktion h Nullstellen besitzt. Bestimmen Sie außerdem für den Graphen von h das Monotonieverhalten und die Art und die Koordinaten der Extrempunkte. (7 BE)

3 Für eine Zaunkonstruktion werden für die Standsäulen Kronenabschlüsse benötigt.
Ein Teil des Graphen der Funktion k mit $k(x) = x - e^{2x-10}$ bildet die obere Kontur einer solchen zwiebelförmigen Säulenkrönung, die durch Rotation des Graphen von k um die positive x-Achse entsteht (siehe nebenstehende Graphik).
Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers, wenn seine Höhe 5 LE beträgt. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle. (7 BE)



4 Gegeben ist die separierbare Differenzialgleichung $y' \cdot (x^2 - 1) = (x-3)\cdot\frac{y^2+2}{2y}$ mit x>1 und y>0.
Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt $P(2\,|\,\sqrt{7})$ verläuft. (9 BE)

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto 2\cdot\arctan\left(\frac{x^2-a}{x^2+a}\right)$ mit der in IR maximalen Definitionsmenge D_{f_a} und $a\in IR\setminus\{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x\to\pm\infty$. Berechnen Sie auch die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. (7 BE)

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a und die Art und die Koordinaten des Extrempunktes in Abhängigkeit von a. (11 BE)
(Teilergebnis: $f_a'(x)=\frac{4ax}{x^4+a^2}$)

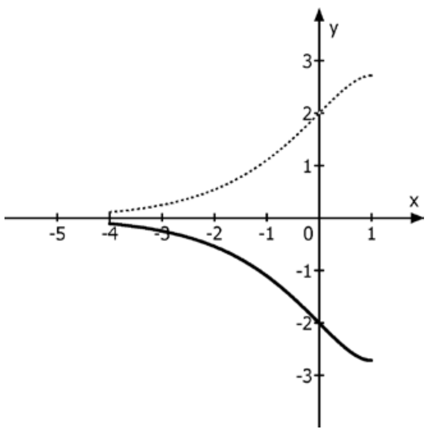
Gegeben ist weiter die Integralfunktion $g : x \mapsto \int_0^x \frac{16t}{t^4+16}dt$ mit der Definitionsmenge D_g = IR.

1.3 Zeigen Sie durch Integration, dass sich g(x) schreiben lässt in der Form $g(x)= 2\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)$. (5 BE)

1.4 Begründen Sie, dass sich die Funktionen f_4 und g nur um eine additive Konstante unterscheiden, und berechnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von g an und zeichnen Sie den Graphen im Bereich $-5 \le x \le 5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte (1LE=1cm; Platzbedarf für 1.5: $y\ge-5$). (7 BE)

1.5 Begründen Sie, dass die Funktion g für $x\le0$ umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der zugehörigen Umkehrfunktion h. Geben Sie auch die Definitionsmenge von h an. Zeichnen Sie den Graph von h in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.4 ein. (7 BE)

2 Die Mantelfläche eines drehsymmetrischen Glaskelchs entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion k mit $k(x) = (x-2)\cdot e^x$, $D_k = [-4\,;\,1]$, um die x-Achse. Der Graph von k sowie sein Spiegelbild sind nebenstehender Skizze zu entnehmen. Der Kelch wird anschließend bei $x = -4$ senkrecht verschlossen, aufgestellt und mit einem Ständer versehen. Bei allen Rechnungen soll die Wandstärke des Kelchs vernachlässigt werden. Runden Sie alle Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.



2.1 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Kelchs. (7 BE)

2.2 Die Maßzahl des Volumens der Flüssigkeit im Kelch bis zur Stelle x lässt sich näherungsweise darstellen durch $V(x) = \frac{1}{4}\pi\cdot e^{2x}(2x^2 - 10x + 13)$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Wert x, bei dem die Maßzahl des Volumens der Flüssigkeit 15 Volumeneinheiten beträgt, mit einem Näherungsschritt des Newton-Verfahrens mit Startwert x = 1. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. (5 BE)

3 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + \frac{2x+1}{x+1}y = (x^2-1)\cdot e^x$ mit $x>-1$ mit der Methode der Variation der Konstanten. (11 BE)

Aufgabengruppe B

B I

1 Eine städtische Leihbibliothek bietet Bücher und DVDs zur Ausleihe an. Erfahrungsgemäß leihen 80% der Besucher Bücher (Ereignis B) und 15% DVDs (Ereignis D) aus. 5% der Besucher leihen DVDs, aber keine Bücher aus. Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten für das Verhalten eines zufällig ausgesuchten Besuchers.

1.1 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse B und D stochastisch unabhängig sind. (4 BE)

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
a) ein Besucher, der DVDs ausleiht, kein Buch mitnimmt.
b) ein Besucher, der Bücher ausleiht, auch DVDs mitnimmt.
c) unter 40 zufällig ausgewählten Besuchern 31 oder 32 Besucher ein Buch ausleihen. (5 BE)

1.3 Beim Verlassen werden nacheinander 10 Besucher nach ihrer Ausleihe befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr Besucher als erwartet sowohl Bücher als auch DVDs ausleihen. (3 BE)

2 Im DVD-Angebot findet sich auch die Fantasyreihe „Barry Kotter". Die Reihe besteht aus fünf verschiedenen DVDs, von denen jeweils drei Exemplare zum Bestand der Leihbibliothek gehören.

2.1 Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wie diese 15 DVDs nebeneinander aufgestellt werden können, wenn gleiche DVDs nicht unterschieden werden. (2 BE)

2.2 Derzeit sind 10 dieser DVDs ausgeliehen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Besucher noch alle fünf Teile zusammen ausleihen kann. (3 BE)

3 Vor dem Betreten der Büchersäle müssen Taschen in eines der 100 Schließfächer gesperrt werden. Erfahrungsgemäß nutzen 90% der Besucher diese Schließfächer. Verwenden Sie bei den folgenden Rechnungen die Normalverteilung als Näherung.

3.1 Derzeit befinden sich 120 Besucher in der Bibliothek. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Schließfächer ausreichen. (4 BE)

3.2 Berechnen Sie, wie viele Besucher die Bibliothek höchstens gleichzeitig besuchen können, damit die Schließfächer mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% ausreichen. (7 BE)

4 Ein Besucher hält sich durchschnittlich 20 Minuten in der Bibliothek auf. Die Aufenthaltsdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 3 Minuten.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig betrachteter Besucher höchstens 25 Minuten in der Bibliothek verbringt. (2 BE)

5 In der Vergangenheit lag der Anteil der Besucher, die jünger als 20 Jahre waren, bei mindestens 30%. Die Bibliotheksleitung vermutet, dass jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Besucher jünger als 20 Jahre ist, kleiner als 30% (Gegenhypothese) geworden ist. Um dies zu prüfen wird ein Signifikanztest durchgeführt. Eine Mitarbeiterin befragt 500 Besucher nach ihrem Alter und registriert die Anzahl der Unterzwanzigjährigen.

5.1 Bestimmen Sie den Annahmebereich und den Ablehnungsbereich der Nullhypothese für ein Signifikanzniveau von 2,5%. (6 BE)

5.2 Berechnen Sie für diesen Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich 25% der Besucher jünger als 20 Jahre sind und ab 130 jüngeren Besuchern die Nullhypothese angenommen wird. Verwenden Sie bei der Rechnung die Normalverteilung als Näherung. (4 BE)

1 Bei einer landesweiten Prüfung sind 40% der Prüflinge männlich. Interpretieren Sie im Folgenden diese relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Prüfling männlich ist.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) von 12 zufällig gewählten Prüflingen genau 5 männlich sind.
b) von 7 Prüflingen, die zufällig nacheinander einen Prüfungsraum betreten, nur zwei weiblich sind und diese beiden den Raum direkt nacheinander betreten.
c) in einem Klassenzimmer mit 25 Prüflingen mindestens 13 weibliche Prüflinge sind. (6 BE)

1.2 Berechnen Sie, wie viele Prüflinge einen Prüfungsraum mindestens betreten müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens einer dieser Prüflinge männlich ist. (4 BE)

1.3 In der Woche vor den Prüfungen haben sich die Prüfungsteilnehmer intensiv auf die Prüfung vorbereitet. Die Zufallsgröße X steht in der folgenden Tabelle für die ganzzahlig gerundete Anzahl der Stunden, die ein Prüfungsteilnehmer durchschnittlich täglich zur Vorbereitung aufgebracht hat. Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an mit a, b $\in$ IR.

Anzahl der Stunden x	3	4	5	6	7
P(X = x)	2b	0,17	0,12	2a+b	0,21

Berechnen Sie die Parameter a und b, wenn der Erwartungswert E(X)= 5,15 ist, und bestimmen Sie die Standardabweichung σ. (Teilergebnis a=0,1) (6 BE)

2 In einer Jahrgangsstufe sind 51 Schüler und diese werden in den Klassen A und B unterrichtet. Die Schüler der beiden Klassen haben die Möglichkeit an einem gemeinsamen Fremdsprachenkurs teilzunehmen. $\frac{1}{3}$ der Schüler in Klasse A und $\frac{1}{4}$ der Schüler in Klasse B belegen den Fremdsprachenkurs. 60% der Schüler des Fremdsprachenkurses kommen aus Klasse A. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewählter Schüler in der Klasse B ist und keinen Fremdsprachenkurs besucht. (8 BE)

3 Eine Schule benötigt 350 Abschlusszeitungen. Verwenden Sie bei den Rechnungen die Normalverteilung als Näherung.

3.1 Erfahrungsgemäß kommt es in der Druckerei bei 3% der gedruckten Abschlusszeitungen zu Druckfehlern. Berechnen Sie, wie viele Abschlusszeitungen mindestens gedruckt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 350 fehlerfreie Exemplare zu erhalten. (7 BE)

3.2 Die Druckerei bietet eine neue Gestaltungsvariante an und vermutet, dass sich 70 Prozent der Kunden für die neue Variante entscheiden (Nullhypothese). Die Behauptung soll durch eine Befragung von 210 Kunden auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich der Nullhypothese in einem zweiseitigen Test. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn die neue Variante nur bei 60% der Kunden ankommt. (9 BE)