ABITURPRÜFUNG 2015 ZUM ERWERB DER FACHGEBUNDENEN HOCHSCHULREIFE AN FACHOBERSCHULEN UND BERUFSOBERSCHULEN

MATHEMATIK

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Freitag, 22. Mai 2015, 9.00 Uhr bis 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten;
die Auswahl trifft die Schule.

AI

1.0 Im Jahre 2012 ist die Gasförderung im Feld „*Clipper South*“ in der südlichen britischen Nordsee angelaufen. Eine Planung für die kommenden Jahre sieht folgende Förderraten g(t) vor:

t	0	5	10	15	20
g(t)	108	156	220	300	400

Dabei ist t die Zeit in Jahren seit Förderbeginn und g(t) die Förderrate in Millionen m^3 pro Jahr.
Bis zum vollständigen Abbau des Erdgasfeldes soll sich die Förderrate modellhaft durch die Funktion g mit $g(t) = (a - 2{,}7 \cdot t) \cdot e^{b \cdot t}$, $a, b \in \mathbb{R}$, beschreiben lassen.
Bei den Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

1.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b mit Hilfe der Planungsdaten für $t = 0$ und $t = 10$ und interpretieren Sie den Wert von a im Sachzusammenhang.
(Teilergebnis: $a = 108;\ b = 0{,}1$) (4 BE)

1.2 Ermitteln Sie das Jahr, in dem die Förderrate nach dem Modell auf den Wert 0 abgesunken und damit das Feld vollständig abgebaut sein wird. (3 BE)

1.3 Berechnen Sie, in welchem Jahr die Förderrate am größten sein wird, und geben Sie diese an.
(Teilergebnis: $\dot{g}(t) = (8{,}1 - 0{,}27t) \cdot e^{0{,}1t}$) (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(t) = (1350 - 27t) \cdot e^{0{,}1t}$ eine Stammfunktion von g ist und berechnen Sie das Integral $\int_0^{40} g(t)\,dt$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (5 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AI

2.0 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $h: x \mapsto \frac{(x-1)(3x-0,5x^2)}{x^2-1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$.

2.1 Bestimmen Sie D_h sowie die Nullstellen von h und geben Sie die Art der Definitionslücken von h an. (6 BE)

2.2.0 Im Folgenden wird die stetige Fortsetzung $f: x \mapsto \frac{-0,5x^2+3x}{x+1}$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ der Funktion h betrachtet (Nachweis nicht erforderlich). Ihr Graph ist G_f.

2.2.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von f durch $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - \frac{3,5}{x+1}$ darstellen lässt und geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an. (4 BE)

2.2.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen.

(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-0,5x^2 - x + 3}{(x+1)^2}$) (8 BE)

2.2.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-6 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem. (5 BE)

2.2.4 G_f, die schiefe Asymptote und die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der Zeichnung von 2.2.3 und ermitteln Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet. (7 BE)

3.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(ax^2+bx)$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. g besitzt eine Nullstelle $x_N = 2$ und eine Extremstelle $x_E = 3$.

3.1 Berechnen Sie die Werte a und b.

(Ergebnis: $a = -\frac{1}{8}$; $b = \frac{3}{4}$) (5 BE)

3.2 Bestimmen Sie die Art des Extrempunktes des Graphen von g. (3 BE)

AII

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $h: x \mapsto \frac{(x^2+1)(1-x)}{x^2-3x+2}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie D_h und geben Sie die Lage und die Art der Definitionslücken von h an. Untersuchen Sie h auf Nullstellen. Geben Sie die Funktionsgleichung der stetigen Fortsetzung von h an. (7 BE)

1.2.0 Betrachtet wird nun die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2+1}{2-x}$ in ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ihr Graph ist G_f.

1.2.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von f in der Form $f(x) = -x - 2 + \frac{5}{2-x}$ darstellen lässt.
Geben Sie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten von G_f an und untersuchen Sie das Verhalten von f bei Annäherung an die Definitionslücke.
(6 BE)

1.2.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Runden Sie diese auf zwei Nachkommastellen.

(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-x^2+4x+1}{(2-x)^2}$) (8 BE)

1.2.3 Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-5 \le x \le 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Verwenden Sie für die Zeichnung eine ganze Seite. (5 BE)

1.2.4 Der Graph der Funktion f und eine Parallele zur x-Achse im Abstand von 2 LE schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung (Aufgabe 1.2.3) und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen gerundet. (7 BE)

1.3.0 Nun wird die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{x^2+1}{2-x}\right)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Verwenden Sie im Folgenden gegebenenfalls die Ergebnisse von Teilaufgabe 1.2.

1.3.1 Bestimmen Sie D_g und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen der Definitionsmenge. (3 BE)

1.3.2 Berechnen Sie die Nullstellen von g. (3 BE)

1.3.3 Weisen Sie nach, dass der Graph von g einen Extrempunkt besitzt, und geben Sie dessen Art und Koordinaten an. (3 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung AII

2.0 Bei einer Infusion wird einem Patienten pro Minute eine konstante Menge eines Medikaments zugeführt. Das im Blut angereicherte Medikament wird über die Nieren wieder ausgeschieden. Der Anteil der im Blut vorhandenen Medikamentenmenge, der pro Minute abgebaut wird, wird als Ausscheidungsrate a bezeichnet.
Für die im Blut des Patienten befindliche Menge m des Medikaments in mg (Milligramm) zum Zeitpunkt t (in Minuten) nach Beginn der Infusion ergibt sich eine Funktion der Form:
$m(t) = 100(1 - e^{-at})$, $t \geq 0$ und $a > 0$.
Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie bei der Zeit immer auf Minuten, bei der Menge auf zwei Nachkommastellen.

2.1 Eine Minute nach Beginn der Infusion befinden sich bereits 4,88 mg des Medikaments im Blut des Patienten. Weisen Sie nach, dass für die Ausscheidungsrate $a = 0{,}05\left(\frac{1}{\min}\right)$ gilt. (2 BE)

2.2 Berechnen Sie, welche Menge des Medikaments sich 10 Minuten nach Anlegen der Infusion im Blut befindet und wann die therapeutische Minimalmenge von 70 mg erreicht wird.
Bestimmen Sie die Menge, die bei dauerhafter Infusionstherapie langfristig im Körper des Patienten vorhanden ist. (4 BE)

2.3 Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung von m gilt:
$\dot{m}(t) = 5e^{-0{,}05t}$. Berechnen Sie die Werte $\dot{m}(10)$ und $\dot{m}(30)$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang. (4 BE)

2.4.0 Die dem Patienten während der gesamten Infusion zugeführte Medikamentenmenge pro Minute ist von Anfang an konstant.

2.4.1 Ermitteln Sie die pro Minute zugeführte Medikamentenmenge. (2 BE)

2.4.2 In einer Infusionsflasche befinden sich 1000 mg. Die Infusion wird um 8.00 Uhr erstmals beim Patienten angelegt. Damit werden dem Patienten ab diesem Zeitpunkt konstant 5 mg des Medikaments pro Minute zugeführt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Flasche leer ist.
Ab diesem Zeitpunkt wird das Medikament gemäß der Funktion
$r(t) = 100e^{-0{,}05t}$ mit $t \geq 0$ abgebaut, wobei r(t) die zur Zeit t vorhandene Restmenge angibt. Begründen Sie, warum diese Funktion den Sachverhalt sinnvoll wiedergibt, und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Pflegekraft die Infusionsflasche ersetzen muss, bevor die therapeutische Minimalmenge von 70 mg im Blut des Patienten unterschritten wird. (6 BE)

BI

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie die Ebenen

$E: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $F: 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2 = 0$ mit $k, m, r \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Berechnen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.
(Mögliches Teilergebnis: E: $3x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 0$) (4 BE)

1.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F.
(mögliches Ergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$) (4 BE)

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, den E, F und g gemeinsam haben.
(5 BE)

1.4 Überprüfen Sie, ob der Aufpunkt von g auf einer der beiden Ebenen E oder F liegt, und fertigen Sie eine Skizze an, aus der man die gegenseitige Lage von E, F, s, g und S ersehen kann. (6 BE)

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung BI

2.0 Die drei Fertigungsbereiche K, L und M eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Gesamtproduktion beträgt im Bereich K 200 ME (Mengeneinheiten), im Bereich L 150 ME und im Bereich M 140 ME. Die Inputmatrix der Verflechtung ist gegeben durch: $A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 & 0,05 \\ 0,15 & 0,2 & 0 \\ 0,55 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$

2.1 Erläutern Sie die Bedeutung der Werte 0 in der Inputmatrix, berechnen Sie die Marktabgaben der Bereiche K, L und M und zeichnen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm (Gozintograph). (7 BE)

2.2.0 In der nächsten Produktionsperiode führt eine Änderung im Fertigungssystem zur neuen Input-Matrix $A_{neu} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 & 0,05 \\ 0,15 & 0,2 & 0 \\ a & 0 & 0,05 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$.

2.2.1 Interpretieren Sie die Veränderungen der Input-Matrix. (2 BE)

2.2.2 In dieser Periode sollen folgende Rahmenbedingungen gelten:

- Es wird erwartet, dass die Marktnachfrage nach den Produkten des Bereiches L auf 114 ME, die nach den Produkten des Bereichs M auf 33 ME steigt.
- Die Produktionsmenge im Bereich L soll gesteigert werden, während die Produktionsmengen der Bereiche K und M unverändert bleiben.

Bestimmen Sie die Produktionsmenge von Bereich L und die Nachfrage an Produkten aus dem Bereich K. Berechnen Sie außerdem den Wert a der neuen Input-Matrix A_{neu}. (6 BE)

2.2.3 Sei nun $a = 0,5$. In einem zukünftigen Produktionszeitraum soll die Produktion im Bereich K verringert und im Bereich M im gleichen Maße gesteigert werden. Der neue Produktionsvektor lässt sich in Abhängigkeit des Parameters $u \in \mathbb{R}^+$ darstellen durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200-u \\ 180 \\ 140+u \end{pmatrix}$. Die Marktabgabe von Bereich L soll auf mindestens 129 Mengeneinheiten erhöht werden.
Bestimmen Sie das größtmögliche Intervall der Werte, die u annehmen kann. (6 BE)

BII

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c_k}=\begin{pmatrix}k+1\\-6k-7\\5k\end{pmatrix}$ und $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-3\\9\end{pmatrix}$

mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.

1.1 Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c_k}$ unabhängig von k eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. (4 BE)

1.2 Stellen Sie für $k=-1$ den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c_{-1}}$ dar. (4 BE)

1.3 Der Punkt $D(0\,|-3\,|\,9)$ und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen die Ebene E auf. Geben Sie eine Gleichung von E in Parameterform an und bestimmen Sie die zugehörige Koordinatenform. (Mögl. Teilerg.: $E: x_1+x_2+x_3-6=0$) (4 BE)

1.4 Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen und zeichnen Sie E in ein Koordinatensystem. (4 BE)

1.5 Die Ortsvektoren $\vec{c_k} = \overrightarrow{OC_k}$ legen die Punkte C_k einer Geraden g fest. Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an und untersuchen Sie die gegenseitige Lage von E und g. (3 BE)

2.0 Die Unternehmen K, L und M sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Inputmatrix der Verflechtung ist

$A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,1 & 0,3\\0,1 & 0,2 & 0,1\\0,2 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}$. Der Eigenverbrauch von K beträgt 8 ME, K beliefert L mit 2 ME und M mit 9 ME.

2.1 Erläutern Sie, welche Gemeinsamkeit für den jeweiligen Eigenverbrauch der drei Unternehmen festgestellt werden kann, und erstellen Sie eine vollständige Input-Output-Tabelle der Verflechtung. (6 BE)

2.2 In der nächsten Produktionsperiode ist geplant, dass die Produktion in K doppelt so hoch ist wie in L. Das Unternehmen M soll 30 ME produzieren. Bestimmen Sie, in welchen Grenzen die Produktion in L möglich ist und für welche Produktion in L die Summe der Marktabgaben maximal wird. (7 BE)

2.3 In der Zukunft soll die Marktabgabe $\vec{y}=\begin{pmatrix}t^2\\8\\3-t\end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t \leq 3$ betragen.

Berechnen Sie die Produktion des <u>Unternehmens M</u> in Abhängigkeit von t und ermitteln Sie, für welchen Wert von t die Produktion in M minimal wird. (8 BE)