Fachabiturprüfung 2016

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Dienstag, 31. Mai 2016, 9.00 – 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und S zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

A I

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}(x^3 + 8x^2 + 16x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f mit jeweiliger Vielfachheit. (4 BE)

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f. (8 BE)

1.3 Berechnen Sie die maximale positive Steigung des Graphen G_f. (5 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-6 \le x \le 1$ unter Kennzeichnung bisheriger Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm. (4 BE)

2.0 Der Graph G_p der quadratischen Funktion p enthält die Punkte $A(-6|6)$, $B(-2|-2)$ und $C(1|2{,}5)$.

2.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). (7 BE)

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 4x)$]

2.2 Zeichnen Sie den Graphen G_p im Bereich $-6 \le x \le 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein. (2 BE)

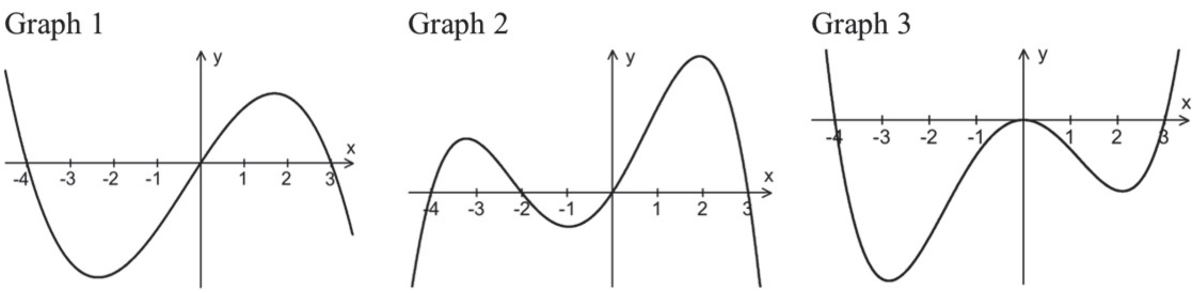
2.3 Die Graphen G_f und G_p schließen insgesamt zwei endliche Flächenstücke ein. Markieren Sie im vorhandenen Koordinatensystem das weiter links gelegene und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die ganzzahligen Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden. (6 BE)

3.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $h_t: x \mapsto \frac{1}{4}x(tx-1)(x+4)(x-3)$ mit $D_{h_t} = \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

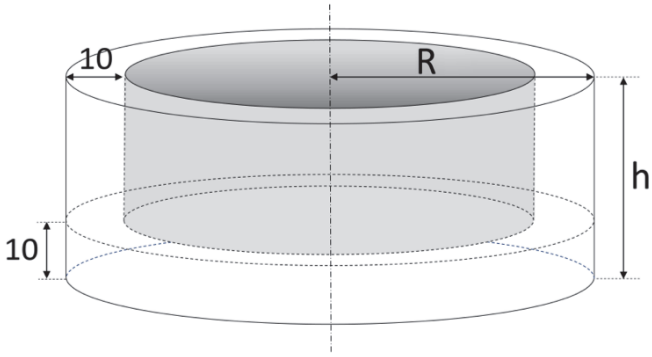
3.1 Bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion h_t in Abhängigkeit von t. (7 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

3.2 Begründen Sie, welche der im Folgenden dargestellten Graphen zur Funktionenschar h_t gehören können und welche nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung mithilfe der ganzzahligen Nullstellen und ggf. des Grenzverhaltens bzw. des Leitkoeffizienten. Geben Sie für den Fall, dass der Graph zur Funktionenschar h_t gehört, den zutreffenden Wert von t an. (6 BE)



4.0 Ein Planschbecken soll entsprechend folgender Skizze hergestellt werden, wobei der Boden und die Wand luftgefüllte Hohlkammern mit einer Dicke von 10 cm sind. Die Summe aus Radius R und Höhe h soll konstant 90 cm betragen.



4.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche die Maßzahl des Volumens des mit Luft gefüllten Teils des Planschbeckens in Abhängigkeit von R beschreibt. (6 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(R) = \pi\,(-10R^2 + 1700R - 8000)$]

4.2 Mit der Vorgabe $10 < R \leq 55$ soll die Funktion $V: R \mapsto V(R)$ den absolut größten Wert annehmen. Berechnen Sie für diesen Fall die maximale Füllhöhe des Planschbeckens. (5 BE)

A II

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{16}(x+3)(x+\frac{4}{3})(4-x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an. (3 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass sich f(x) auch in der Form $f(x) = -\frac{1}{16}(3x^3 + x^2 - 40x - 48)$ darstellen lässt. (3 BE)

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f. (6 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-4 \le x \le 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1cm. (4 BE)

1.5 Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Schnittpunkt mit der y-Achse. Bestimmen Sie dann den Bereich, in dem die Steigung des Graphen G_f größer ist als die berechnete Tangentensteigung. (6 BE)

1.6 Die Parabel P ist der Graph der quadratischen Funktion p. $S(-4\,|\,4)$ ist der Hochpunkt von P und zugleich Schnittpunkt von P mit G_f. Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Graphen liegt auf der y-Achse. Ermitteln Sie den Funktionsterm von p und zeichnen Sie die Parabel P im Bereich $-4 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem ein. (6 BE)

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$]

1.7 Die Graphen G_f und P schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt. (5 BE)

2.0 Gegeben ist die Funktionenschar $g_a: x \mapsto 0{,}25(x^3 - 2ax^2)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$.

Der Graph von g_a wird mit G_a bezeichnet.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von g_a und geben Sie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a an. (5 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung A II

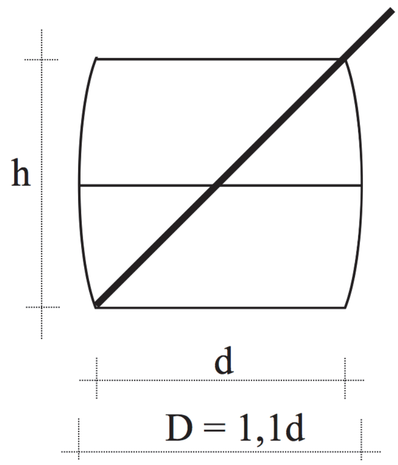
2.2.0 Nun wird $a = 3$ gesetzt und es gilt: $g_3(x) = 0{,}25(x^3 - 6x^2)$. Des Weiteren ist die lineare Funktion $t: x \mapsto -3x + 2$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2.2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_3. (4 BE)

2.2.2 Untersuchen Sie rechnerisch, ob die abschnittsweise definierte Funktion $h: x \mapsto \begin{cases} g_3(x) & \text{für } x \leq 2 \\ t(x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$ an der Nahtstelle differenzierbar ist. (5 BE)

2.2.3 Beschreiben Sie mithilfe der Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben die besondere Lage des Graphen der linearen Funktion t in Bezug auf G_3. (2 BE)

3.0 Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen $V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot (2D^2 + d^2)$. Hierbei ist d jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und D der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll D 10% größer sein als d. Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).



3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe h beschreibt. (4 BE)

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot (-h^3 + 100h)$]

3.2 Mit der Vorgabe $5 \leq h \leq 9$ soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe h in cm und das zugehörige Volumen in cm³ auf eine Nachkommastelle gerundet. (7 BE)

S I

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Die Glocken-Apotheke bietet ihren erkälteten Kunden Hustensaft (H), Kopfschmerztabletten (K) und Nasenspray (N) an, wobei jeder entsprechende Kunde mindestens eines dieser Produkte erwirbt. Im Folgenden werden nur diese drei Medikamente betrachtet.
Aus Erfahrung weiß der Apotheker, dass unabhängig voneinander 25% der Kunden einen Hustensaft erwerben und jeder fünfte Kunde Kopfschmerztabletten kauft. Kunden kaufen zu 60% auch ein Nasenspray, wenn sie mindestens eines der anderen Medikamente erwerben. Der Einkauf eines beliebig herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 7 Elementarereignisse.
[Teilergebnis: $P(\{H\overline{K}N\}) = 0{,}12$] (5 BE)

1.2 Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: „Ein zufällig ausgewählter Kunde kauft keine Kopfschmerztabletten.“
E_2: „Es wird Nasenspray und mindestens ein weiteres Produkt gekauft.“
$E_3 = \overline{\overline{E}_1 \cup E_2}$
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie E_3 möglichst einfach in Worten und berechnen Sie $P(E_3)$. (5 BE)

1.3.0 Der Apotheker bietet seinen Kunden nur Hustensaft der Marken A und B an. Von 500 Hustensaftkäufern entscheiden sich 400 für den Hustensaft A. Bei 280 der Kunden, die Hustensaft A kaufen, tritt eine Verbesserung der Symptome ein. Von den Käufern der Hustensaftmarke B geben 30 an, dass keine Verbesserung der Symptome auftritt.

1.3.1 Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, überprüfen Sie, ob die Ereignisse
A: „Ein Kunde kauft Hustensaft der Marke A.“ und
V: „Es tritt eine Verbesserung der Symptome auf.“
stochastisch unabhängig sind und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (5 BE)

1.3.2 Berechnen Sie $P(\overline{A} \cup V)$. (2 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

2.0 Ein Pharmakonzern führt eine Untersuchung über die Wirksamkeit des Grippemittels G durch. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Tage bis zur vollständigen Genesung bei Einnahme des Medikaments G an. Dabei ergibt sich mit $a,b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	a	$b - 2a$	0,4	b	0,15	2a

2.1 Bestimmen Sie die Parameter a und b, wenn die vollständige Genesung im Durchschnitt nach 6,6 Tagen eintritt.
[Teilergebnis: a = 0,05] (5 BE)

2.2 Berechnen Sie mit den Werten von a und b aus Teilaufgabe 2.1 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$. (4 BE)

2.3 Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus Teilaufgabe 2.2 die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse auf 5 Nachkommastellen gerundet: (6 BE)

E_4: „Von 20 Patienten sind nach 4 Tagen genau 4 vollständig genesen.“

E_5: „Von 100 Patienten tritt bei höchstens 30 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

E_6: „Von 50 Patienten tritt bei mindestens 10 aber weniger als 20 die vollständige Genesung nach genau 7 Tagen ein.“

3.0 Der Pharmakonzern behauptet, dass bei höchstens 15% der Patienten nach der Einnahme des Medikaments G Nebenwirkungen auftreten. Der Apotheker glaubt jedoch, dass der Anteil höher ist (Gegenhypothese). Deshalb führt er eine Befragung bei 200 seiner Kunden durch, die das Medikament G genommen haben.

3.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße und die Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. (5 BE)

3.2 Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn bei 35 der befragten Kunden Nebenwirkungen auftreten? Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. (3 BE)

S II

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Am Pausenstand einer Schule werden Kaltgetränke in Glasflaschen (G), Plastikflaschen (P) und Tetrapaks (T) angeboten. Innerhalb einer Woche werden insgesamt 2080 Kaltgetränke verkauft, darunter 624 in Glasflaschen. Der Anteil der Plastikflaschen beträgt 55%. Die Bestimmung des wöchentlichen Kaufverhaltens eines zufällig herausgegriffenen Schülers, der zwei Kaltgetränke pro Woche kauft, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse. (5 BE)

1.2 Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1: „Ein Schüler kauft zwei Kaltgetränke derselben Verpackungsart.“

E_2: „Ein Schüler kauft mindestens ein Kaltgetränk in der Glasflasche.“

$E_3 = \overline{E_1 \cup \overline{E_2}}$

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie E_3 möglichst einfach in Worten und berechnen Sie $P(E_3)$. (5 BE)

1.3.0 Eine Glasflasche kostet 10 Cent Pfand, eine Plastikflasche 15 Cent und ein Tetrapak ist pfandfrei. Die Zufallsgröße X gibt in Euro an, wie viel Pfand ein zufällig herausgegriffener Schüler in einer Woche gezahlt hat.

1.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform. (4 BE)

1.3.2 Berechnen Sie, wie viel Pfand ein Schüler erwartungsgemäß in einem Schuljahr zahlt. Gehen Sie dabei von 38 Schulwochen aus. (3 BE)

1.3.3 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der gezahlte wöchentliche Pfandbetrag um maximal 10 Cent vom Erwartungswert abweicht. (3 BE)

Fortsetzung siehe nächste Seite

Fortsetzung S II

2.0 Bei der Leerung der Müllkörbe wurde festgestellt, dass regelmäßig Pfandflaschen zu finden sind. Die nach B(n; p) verteilte Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der weggeworfenen Flaschen. Von n verkauften Flaschen werden im Mittel 40 Flaschen nicht zurückgegeben. Die Varianz beträgt 24.

2.1 Berechnen Sie die Anzahl n der verkauften Pfandflaschen und die Wahrscheinlichkeit p, dass eine Pfandflasche in den Müll geworfen wird. (4 BE)

2.2 Setzen Sie nun $n = 100$ und $p = 0{,}4$. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse:

E_4: „Genau 65 Pfandflaschen werden am Pausenverkauf zurückgegeben."

E_5: „Mehr als 28 aber weniger als 45 Flaschen werden nicht zurückgegeben." (4 BE)

3.0 Die SMV behauptet, dass sich nach Durchführung einer Umwelt-Kampagne die schlechte Retourquote von lediglich 60% der Pfandflaschen erhöht hat (Gegenhypothese). Um den Erfolg dieser Aktion zu überprüfen, werden 100 markierte Flaschen in Hinblick auf ihre Rückgabe untersucht.

3.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. (5 BE)

3.2 Interpretieren Sie im Sachzusammenhang, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 35% der Flaschen im Test nicht zurückgegeben werden. (2 BE)

4 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_6: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben."

E_7: „Eine Pfandflasche enthielt Mineralwasser."

E_8: „Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben und enthielt kein Mineralwasser."

Dabei gelte: $P(E_6) = 0{,}6$; $P(E_7) = 0{,}3$; $P(E_8) = 0{,}42$

Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse E_6 und E_7 vereinbar und stochastisch unabhängig sind. (5 BE)