Fachabiturprüfung 2016 zum Erwerb der Fachhochschulreife an

Fachoberschulen und Berufsoberschulen

M A T H E M A T I K

Ausbildungsrichtung Technik

Dienstag, 31. Mai 2016, 9.00 - 12.00 Uhr

Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen A und B zu bearbeiten. Die Auswahl der Aufgaben trifft die Schule.

Aufgabengruppe A: Analysis

A I

BE		
	1.0	Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{(x+2a)\cdot(x-a)}{x-5}$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.
5	1.1	Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl der Nullstellen von f_a.
6	1.2	Berechnen Sie sämtliche Werte von a, für welche die Steigung des Graphen von f_a an der Stelle x = 4 den Wert -6 besitzt.
	1.3.0	Für die nun folgenden Aufgaben wird die Funktion g mit maximaler Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ und der Funktionsgleichung $g(x) = \ln(f_{-2}(x))$ betrachtet, d.h. es gilt $g(x) = \ln\left(\frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5}\right)$.
4	1.3.1	Zeigen Sie, dass für den maximalen Definitionsbereich D_g der Funktion g gilt: $D_g \subset \mathbb{R}$ und $D_g =]-2;4[\cup]5;\infty[$.
8	1.3.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte g(x) an den Rändern des Definitionsbereiches und geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten des Graphen von g an.
10	1.3.3	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von g und ermitteln Sie mithilfe dieser Monotonieintervalle die Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen von g. Verwenden Sie dabei, dass für $x \in D_g$ gilt: $(x+2)\cdot(x-4)\cdot(x-5) > 0$ Runden Sie die Ergebnisse auf eine Nachkommastelle. [Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = \frac{x^2 - 10x + 18}{(x+2)\cdot(x-4)\cdot(x-5)}$]
6	1.3.4	Die Funktion g besitzt näherungsweise die beiden Nullstellen $x_1 \approx -0{,}8$ und $x_2 \approx 3{,}8$ (Nachweis nicht erforderlich). Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von g für $-2 < x \leq 9$ zusammen mit seinen senkrechten Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE $\triangleq$ 1 cm.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE *Fortsetzung A I:*

2.0 Seit Beginn des 20. Jahrhunderts führt der vom Menschen verursachte zusätzliche Ausstoß von Kohlenstoffdioxid (CO_2) zu einer Verstärkung des Treibhauseffektes, das heißt zu einem globalen Temperaturanstieg mit weitreichenden Folgen.
Nach einem mathematischen Modell soll die Entwicklung der weltweiten CO_2-Emissionen abgeschätzt werden. Dieses Modell lässt sich näherungsweise durch die mathematische Funktion $k: t \mapsto a \cdot t^2 \cdot e^{-b \cdot t} + 7$ mit $t, a, b \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$ darstellen.
Dabei entspricht $k(t)$ der CO_2-Emissionsrate in Mrd. Tonnen pro Jahr zum Zeitpunkt t, wobei t die seit Beginn des Jahres 1950 vergangene Zeit in Jahren beschreibt. Unter der CO_2-Emissionsrate wird dabei im Folgenden die ausgestoßene Masse an CO_2 pro Zeiteinheit verstanden.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

6 2.1 Nach diesem Szenario lag die CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2000 bei genau 30 Mrd. Tonnen pro Jahr und zu Beginn des Jahres 2200 wird sie bei genau 17,5 Mrd. Tonnen CO_2 pro Jahr liegen. Bestimmen Sie mithilfe dieser Angaben die Parameter a und b der Funktion k auf drei Nachkommastellen gerundet.

2.2.0 Im Folgenden gilt a = 0,025 und b = 0,020.

Alle folgenden Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

2 2.2.1 Bestimmen Sie die nach diesem Modell prognostizierte CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2017.

8 2.2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt t_m, zu dem die absolut maximale CO_2-Emissionsrate zu erwarten ist.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{k}(t) = 0,05 \cdot e^{-0,02 \cdot t} \cdot \left(-0,01 \cdot t^2 + t\right)$]

4 2.2.3 Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion k für $0 \leq t \leq 250$ (die Jahre 1950 bis 2200) in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: t-Achse: 50 Jahre $\hat{=}$ 2 cm; k-Achse: 10 Mrd. Tonnen/Jahr $\hat{=}$ 2 cm.

7 2.2.4 Ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Jahr zwischen 1950 und heute der Zeitpunkt liegt, an dem die CO_2-Emissionsrate nach diesem Modell am meisten zugenommen hat.

4 2.2.5 Die Funktion $K: t \mapsto \left(-1,25 \cdot t^2 - 125 \cdot t - 6250\right) \cdot e^{-0,02 \cdot t} + 7 \cdot t$ mit $t \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von k (Nachweis nicht erforderlich).
Bestimmen Sie, wie viele Tonnen CO_2 voraussichtlich im Jahr 2016 insgesamt ausgestoßen werden, wenn das obige Modell zugrunde gelegt wird.

70

Aufgabengruppe A: Analysis

A II

BE		
	1.0	Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x \cdot (1-\ln(x))^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und besitzt die y-Achse als Asymptote.
5	1.1	Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f. Geben Sie die Definitionslücke von f und ihre Art genau an.
6	1.2	Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \infty$ und für $x \to e$. Geben Sie die Art und die Gleichungen der daraus folgenden Asymptoten des Graphen von f an.
11	1.3	Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und ermitteln Sie mithilfe dieser Monotonieintervalle die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes des Graphen von f. [Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2 \cdot (1-\ln(x))^3}$]
6	1.4	Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f für $0 < x \leq 6$ sowie mit Farbe sämtliche Asymptoten von G_f in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE $\hat{=}$ 2 cm.
6	1.5	Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f, die durch den Ursprung verläuft. Zeichnen Sie die Tangente t in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.4 ein. [Teilergebnis: $t(x) = x$]
5	1.6	Die Tangente t schneidet G_f im Punkt $S(x_S \mid f(x_S))$. Berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Schnittstelle x_S. Verwenden Sie dazu den Startwert $x_0 = 3{,}5$, führen Sie zwei Näherungsschritte durch und runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.
3	1.7	Gegeben ist die reelle Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{1-\ln(x)}$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$. Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f in D_F ist.
	1.8.0	Der Graph von f, die Tangente t und die Gerade k_a mit der Gleichung $x = a$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge 0 < a < 1$ schließen rechts von k_a ein endliches Flächenstück mit der von a abhängigen Maßzahl $A(a)$ des Flächeninhalts ein.
4	1.8.1	Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für $a = 0{,}25$ in Ihrem Schaubild aus 1.4 und zeigen Sie, dass für $A(a)$ gilt: $A(a) = 0{,}5 \cdot (a^2 + 1) - \frac{1}{1-\ln(a)}$.
2	1.8.2	Ermitteln Sie den rechtsseitigen Grenzwert von $A(a)$ für $a \to 0^+$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE | *Fortsetzung A II:*

4 | 1.9 | Gegeben sind die reellen Funktionen $g_c: x \mapsto \frac{1}{c} \cdot f(x)$ mit der Definitionsmenge $D_{g_c} = D_f$, wobei $c \in \mathbb{R}$ und $c < -1$. Geben Sie mit Begründung an, wie sich der Graph von g_c im Vergleich zu G_f verändert.

2.0 In einer Box werden Mehlwürmer als Futter für Schildkröten gezüchtet. Der Bestand der Mehlwürmer in dieser Box wird in Kilogramm [kg] angegeben und nach einem Modell durch die Funktion $M: t \mapsto a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t, a, b \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, a > 0, b > 0$ beschrieben. Dabei gibt t die Zeit in Tagen [d] ab Beobachtungsbeginn an.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden 0,8 kg Mehlwürmer in die Box eingesetzt. Exakt drei Tage später hat sich ihr Bestand um 2,79 kg vermehrt.

Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

4 | 2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = 0{,}8$ und $b = 0{,}5$.

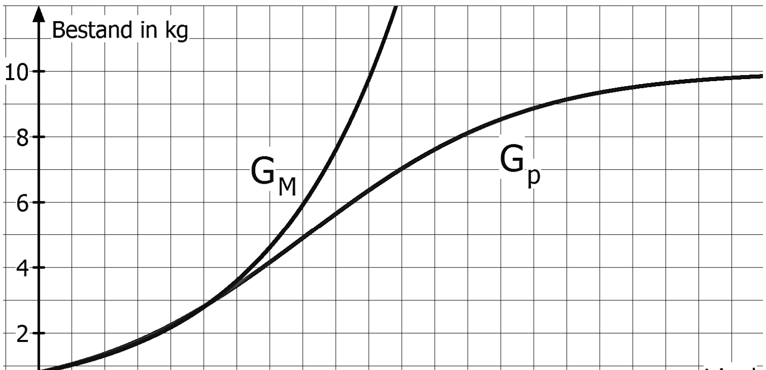
3 | 2.2 Berechnen Sie die mittlere Zuwachsrate des Mehlwürmerbestands in den ersten vier Tagen des Beobachtungszeitraums.

4 | 2.3 Berechnen Sie den Bestand an Mehlwürmern, bei dem die momentane Zuwachsrate $1{,}2\ \frac{kg}{d}$ beträgt.

2.4.0 Durch $M(t)$ wie im obigen Modell wird der Bestand an Mehlwürmern nur für wenige Tage hinreichend genau beschrieben. Der tatsächliche Bestand wird durch die Funktion

$$p: t \mapsto \frac{0{,}8 \cdot S}{0{,}8 + 9{,}2 \cdot e^{-0{,}6 \cdot t}}$$

mit $t, S \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $S > 0$ besser erfasst.



Im obigen Diagramm sind die Graphen von M und p abgebildet.

3 | 2.4.1 Entnehmen Sie dem Verlauf von G_p näherungsweise den maximalen Bestand an Mehlwürmern, die in der Box leben können, und folgern Sie hieraus auf den Wert von S.

4 | 2.4.2 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung aus 2.4.0 die größte momentane Zuwachsrate des Mehlwürmerbestands, wie ihn die Funktion p beschreibt.
Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

70

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B I

BE		
	1.0	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(8\,\vert\,5\,\vert\,6)$, $B(4\,\vert\,1\,\vert\,-1)$, $P_a(2\,\vert\,a\,\vert\,-1)$ und $Q_b(-2b\,\vert\,b\,\vert\,b+1)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sowie die Geraden h_1 und h_2 gegeben: $h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$; $h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$. Die Geraden h_1 und h_2 spannen die Ebene E auf.
3	1.1	Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
4	1.2	Die Ebene $E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 13 = 0$ schneidet die $x_1 - x_3$ – Ebene in der Geraden s. Ermitteln Sie eine Gleichung von s.
3	1.3	Die Gerade g geht durch den Punkt A und schneidet die Ebene E im Punkt P_a. Ermitteln Sie eine Gleichung von g.
5	1.4	Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E sowie die Koordinaten des Spiegelpunktes A', der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene E entsteht.
3	1.5	Prüfen Sie, ob es einen Wert für den Parameter b gibt, sodass die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BQ_b}$ orthogonal sind.
4	1.6	Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABQ_2P_3.
8	1.7	Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar f_c: $f_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c - 1{,}5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\kappa, c \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, für welche Werte von c sich die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}$ mit einer Geraden aus der Geradenschar f_c schneidet.
30		

Aufgabengruppe B: Lineare Algebra und analytische Geometrie

B II

BE		
	1.0	Ein Meeresgebiet ist festgelegt durch die Koordinaten eines ruhenden Forschungsschiffes F(6000 | 1000 | 0), den Fußpunkt eines Leuchtturms L(200 | 5000 | 0) sowie eines zunächst an der Wasseroberfläche fahrenden Unterseeboots mit $U_k(40-2k \mid -20 \mid 0)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die angegebenen Koordinaten stellen Punkte in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem dar. Seegang, Drift und Wind sowie die Erdkrümmung bleiben bei den Berechnungen unberücksichtigt. Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
7	1.1	Zeigen Sie, dass sich das U-Boot geradlinig auf der Wasseroberfläche bewegt, und berechnen Sie den minimalen Abstand des U-Bootes vom Forschungsschiff.
	1.2.0	Für die folgenden Aufgaben gilt k = 10, somit $U_{10}(20 \mid -20 \mid 0)$.
6	1.2.1	Untersuchen Sie, ob sich ein Blauwal an der Position B(1587 | 2243 | 0) außerhalb oder innerhalb des von den Punkten F, L und U_{10} begrenzten Seegebietes aufhält.
4	1.2.2	Funksignale werden zwischen Forschungsschiff F, der Spitze des Leuchtturms S(200 | 5000 | 50) und dem Unterseeboot ausgetauscht. Die Punkte F, S und U_{10} liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform. [Mögliches Teilergebnis: $E: 51x_1 - 299x_2 + 29836x_3 - 7000 = 0$]
4	1.2.3	Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die sowohl in der Wasseroberfläche als auch in der Ebene E aus 1.2.2 liegen.
	1.3.0	Von der Position U_{10} taucht das U-Boot geradlinig in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix}$ bis in eine Wassertiefe von 200 Metern zum Tauchpunkt T ab.
5	1.3.1	Berechnen Sie die Koordinaten des Tauchpunktes T und die beim Tauchvorgang zurückgelegte Strecke. Runden Sie auf ganze Meter.
4	1.3.2	Laut Herstellervorgaben darf das Tauchboot beim Tauchvorgang einen maximalen Tauchwinkel von 16 Grad gegenüber der Horizontalen nicht überschreiten. Prüfen Sie das Einhalten der Vorgaben durch Berechnung.
30		